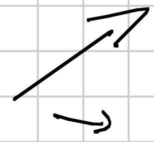
# Vorkurs WS 10/11 Lineare Algebra

Notiztitel

1) Einführung
2) Rechnen mit Vektoren
3.) Basisvektoren
4) Trigonemetrische Funktionen
5) Das Skalarprodukt
6) Vektorprodukt
7) Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt
8) Drehmatrizen
9) Matrizen und Determinanten
10) Lineare Gleichungssysteme
11) Nicht-kartesische Koordinatensysteme.

# 1) Einführung

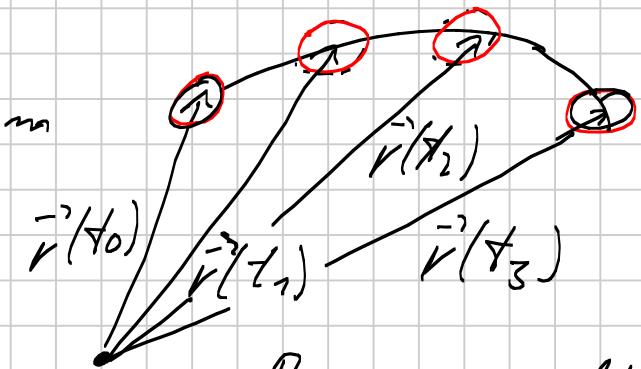
Vektoren stellen gerichtete Größen dar; d.h. sie haben Betrag und Richtung, anschaulich "Pfeile"



Beispiele: Geschwindigkeit (wie schnell und wohin)
Gravitationskraft ($\to$ Beschleunigung nach unten)
Rotation ($\to$ Drehung um eine Achse)

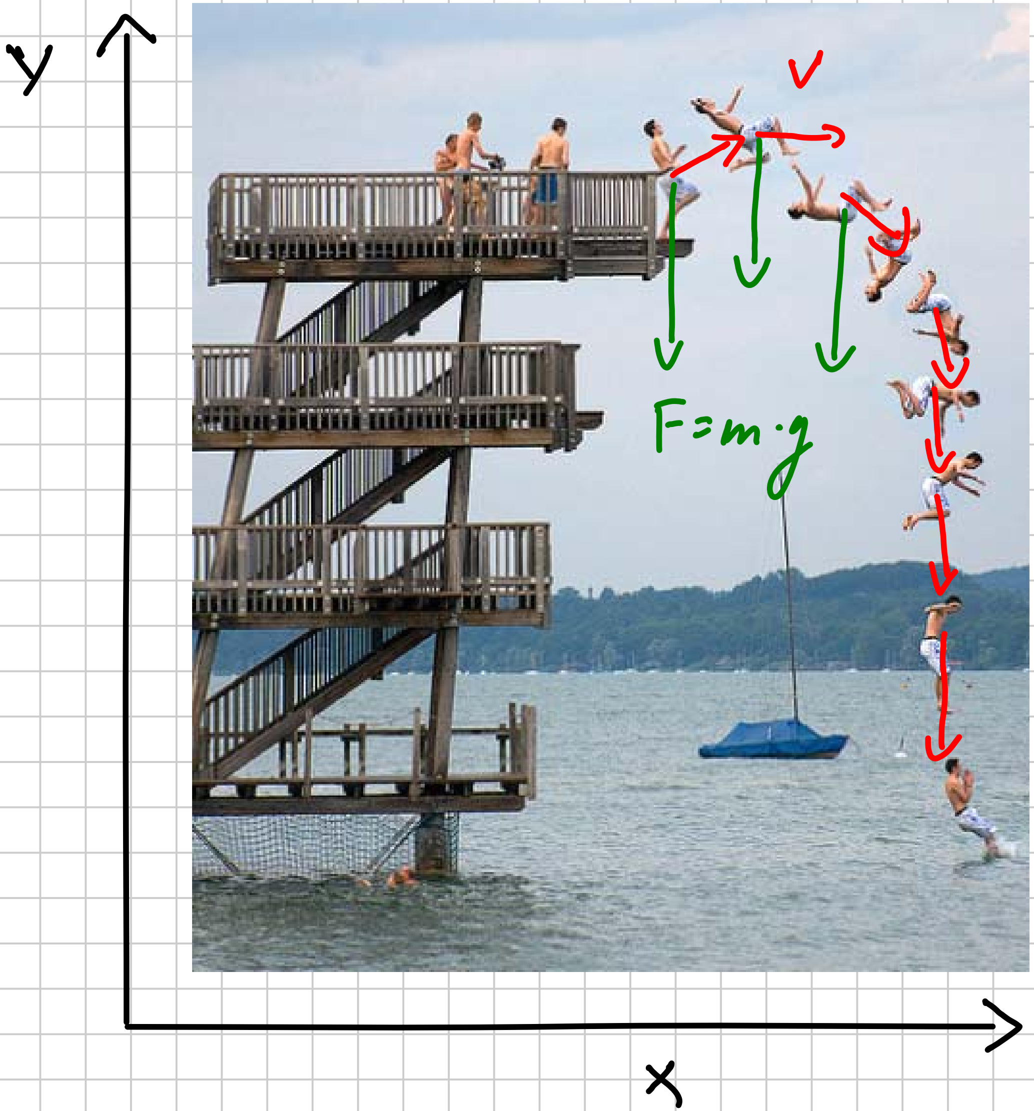
Skalare haben keine Richtung
z.B. Temperatur, Masse, Länge, Zeit, ...

Bewegungen im 3- (oder 2-) dimensionalen Raum lassen sich durch zeitabhängige Ortsvektoren beschreiben.




Ursprung = Bezugspunkt

# Beispiel: Turmspringer




Geschwindigkeit $\vec{v}$

in horizontaler Richtung $v_x$

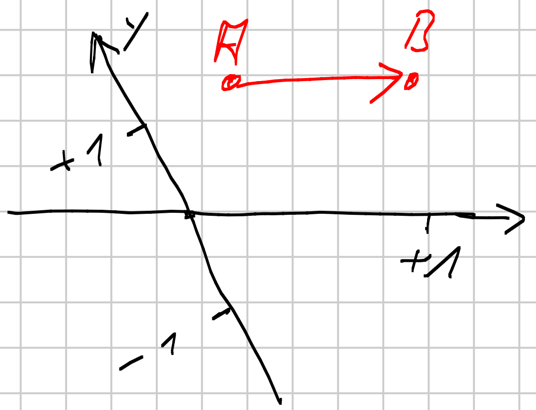
und vertikaler Richtung $v_y$

Kraft $F = m \cdot g$ in vertikaler Richtung

$\Rightarrow$ Beschleunigung

$g \approx 10 \frac{m}{s^2}$ in vertikaler Richtung

## 1.1 Koordinatensysteme

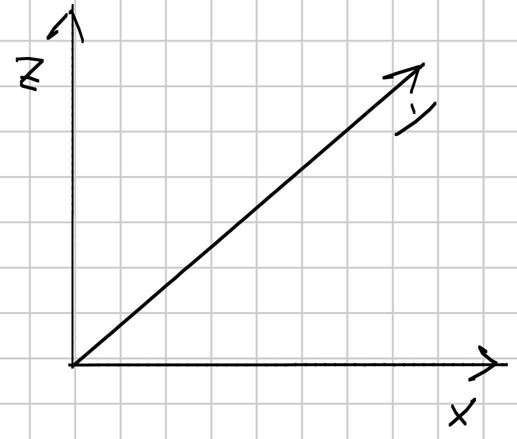



1) wähle willkürlich einen Ursprung
2) wähle Achsen, die nicht parallel sind
3) versehe jede Achse mit Maßstab

Aber: "krumme" Systeme sind nur manchmal sinnvoll!

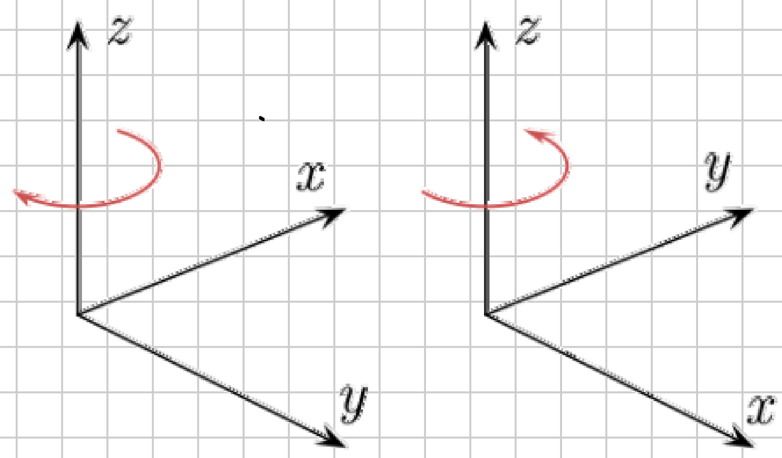
## Orthonormalsystem

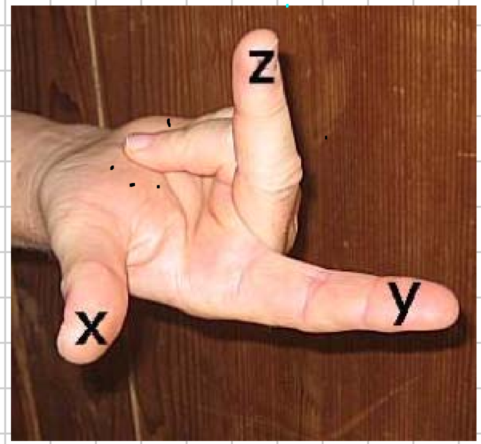
(im 3-dimensionalen Raum)




⇒ Achsen paarweise senkrecht
gleiche Maßstäbe
"rechtshändig"

## 1.2 links- bzw. rechtshändiges System



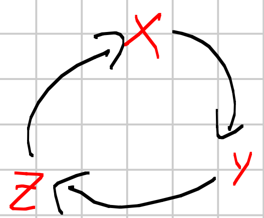

vgl. Links- bzw. Rechtsschraube:

"Rechte-Hand-Regel"

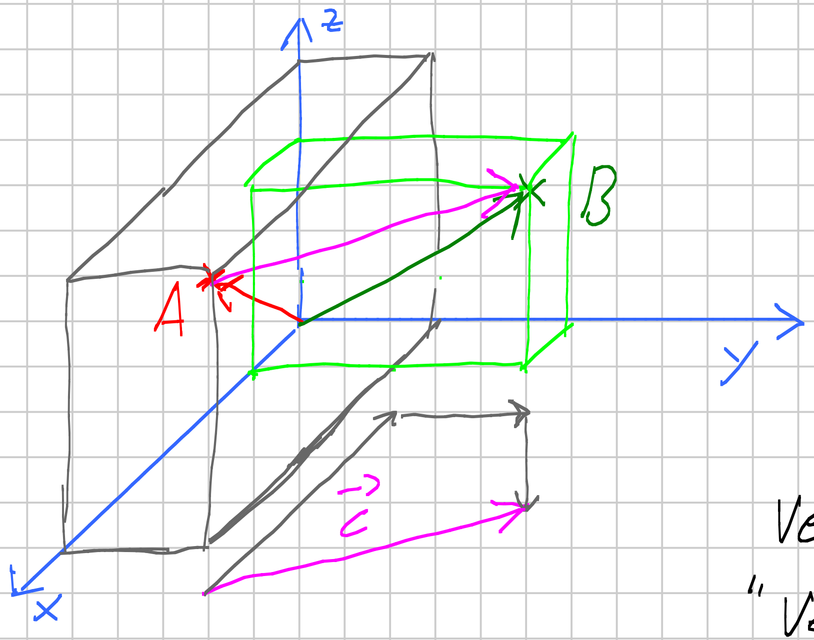
"drehe x- auf y-Achse" ⇒ Schraube mit Links- bzw. Rechtsgewinde bewegt sich in positive z-Richtung

zyklisch vertauschen: drehe y- auf z- ⇒ in pos. x-Richtung

drehe z- auf x- ⇒ in pos. y-Richtung



## 1.3 Kartesisches Koordinatensystem




Koordinaten von $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

"Ortsvektor" von $O$ nach $A$: $\overrightarrow{OA} := \vec{a}$

Ortsvektor nach $B$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB} := \vec{b}$

Vektor von $A$ nach $B$: $\overrightarrow{AB} := \vec{c}$

"Verschiebungsvektor" =

Differenz von Ortsvektoren $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{c} = -\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vektor definiert durch Länge und Richtung

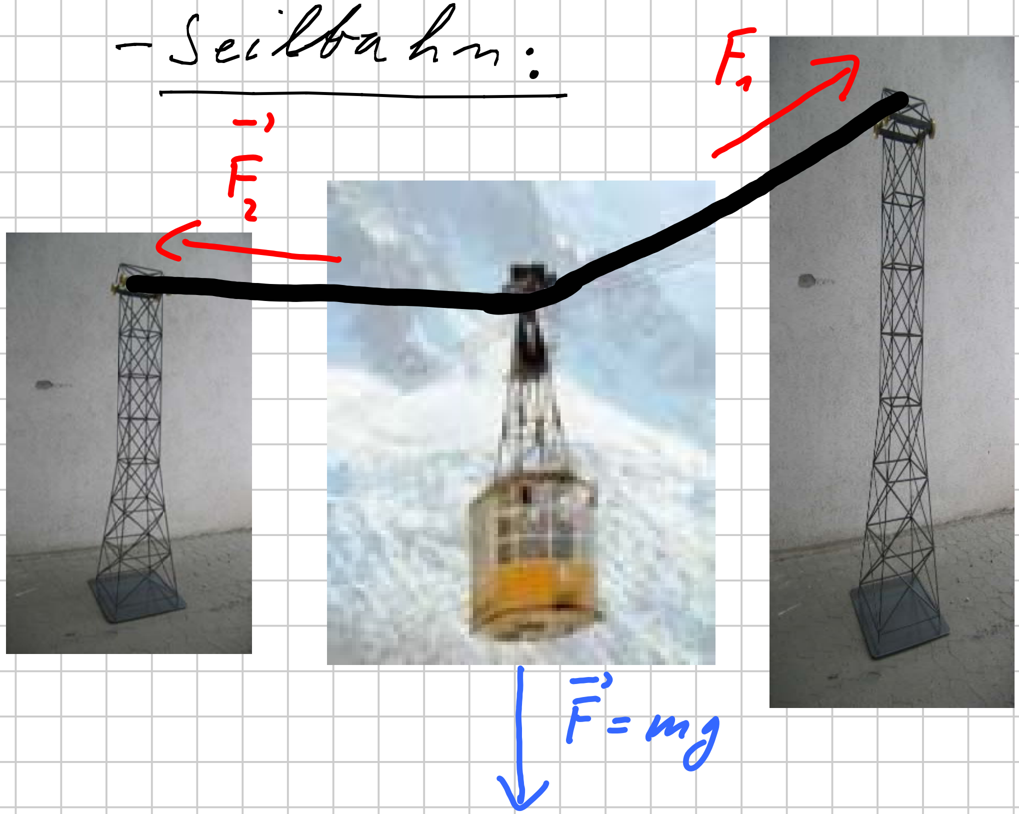
$\Longleftrightarrow$ alle parallelen Pfeile äquivalent

$\Longleftrightarrow$ Vektor repräsentiert alle parallelen Pfeile

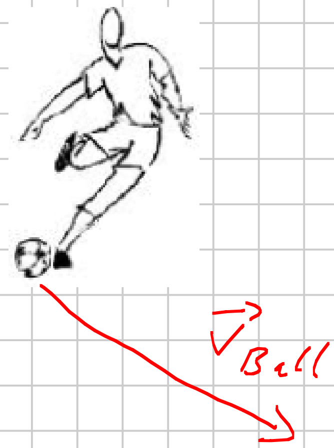
# 2) Rechnen mit Vektoren

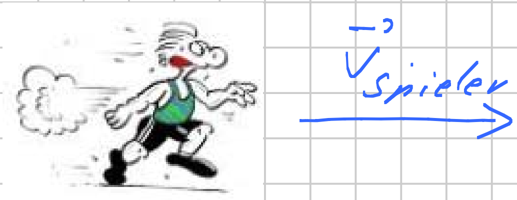
## 2.1 Anwendungsbeispiele

- Seilbahn:



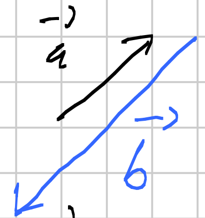

- Fußball:



## 2.2 Rechenregeln

- skalare Multiplikation; z.B.: $\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$

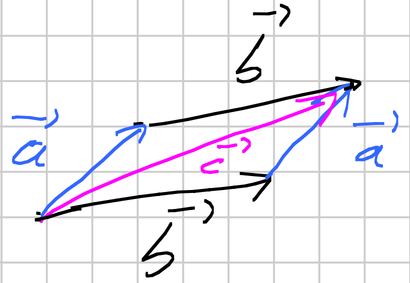



  Nullvektor $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$ (keine Richtung)

- Addition

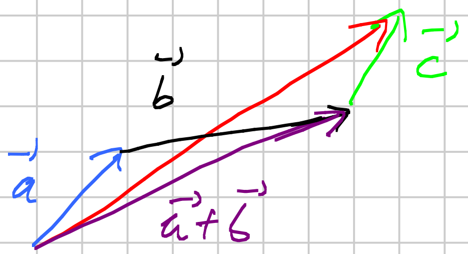
  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

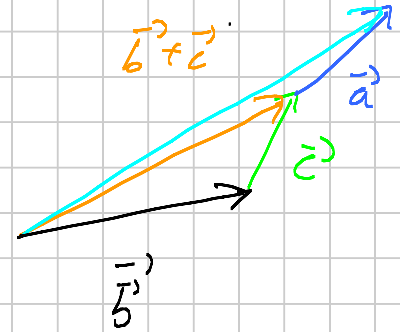
  Kommutativgesetz




- Assoziativgesetz

  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

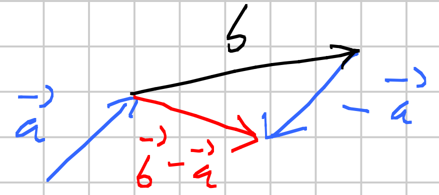


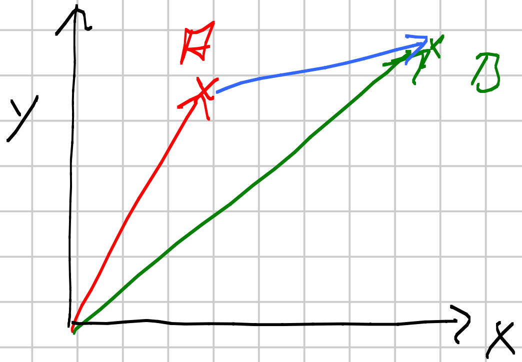




- Subtraktion

  $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$

  Nullvektor $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a}$






$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$

Verbindungsvektor = Differenz der Ortsvektoren

## Zusammenfassung

Axiom 1: $\vec{a}, \vec{b} \in V \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in V$

mit
1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
2. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
3. zu jedem $\vec{a}$ existiert $-\vec{a}$, sodass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Axiom 2: $\vec{a} \in V, \ \alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$

mit
1. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ und $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
2. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
3. Einselement d.h. $1\vec{a} = \vec{a}$

Axiom 1: "Abelsche Gruppe"

Axiom 1 und Axiom 2: "Linearer Raum"

<u>Bem</u>: Es gibt keine Division von Vektoren!

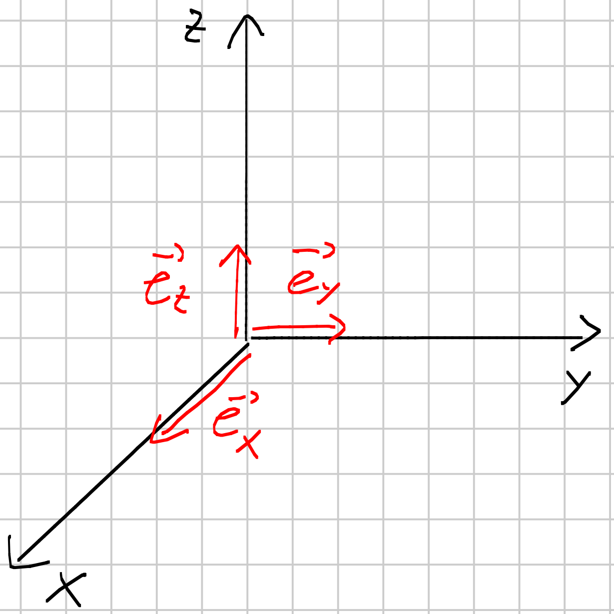
## 3.) Basisvektoren

### 3.1 Einheitsvektoren

$\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert eine Zahl $\alpha$, sodass $|\alpha \cdot \vec{a}| = 1$.

Beweis: $\alpha = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\alpha \vec{a}| = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$




$$\vec{a}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \vec{a}_1 = \alpha\left(x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z\right) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 0\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 3.2 Lineare (Un-) Abhängigkeit:

Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sind linear abhängig, wenn gilt

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{mit } \alpha_i \neq 0 \ \forall i.$$

$\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn $\alpha_i = 0 \ \forall i$.

- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind linear unabhängig
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{a}$ sind linear abhängig, denn $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \vec{a} - x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2 - z\vec{e}_3 = 0$$

$\boxed{\text{Dimension } D \text{ eines Vektorraums} = \text{max. Anzahl l. u. Vektoren}}$

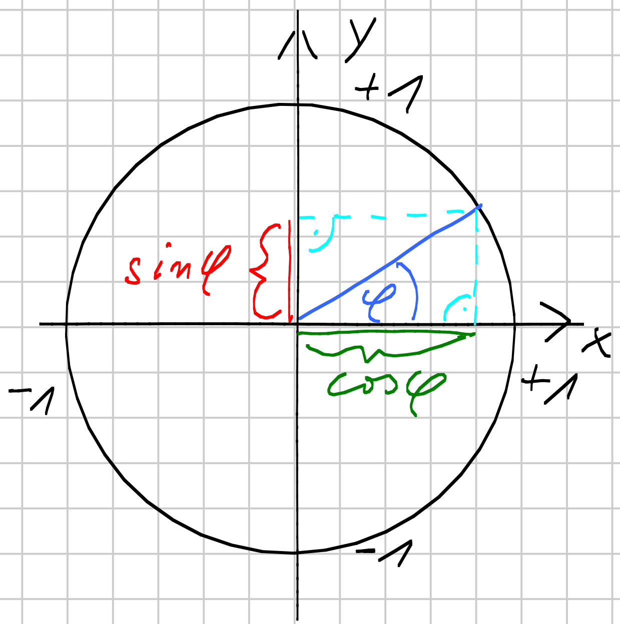
- $D$ l. u. Vektoren bilden eine Basis des Vektorraumes
- Orthonormalbasis (siehe später)

# 4) Einschub: Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis Radius = 1

Sinus, Kosinus, Tangens

sin, cos, tan




$\Rightarrow$ $0 \le \sin\varphi \le 1$ f. $0 \le \varphi \le 180^\circ$

$0 \ge \sin\varphi \ge -1$ f. $180^\circ \le \varphi \le 360^\circ$

$0 \le \cos\varphi \le 1$ f. $0 \le \varphi \le 90^\circ$

$270^\circ \le \varphi \le 360^\circ$

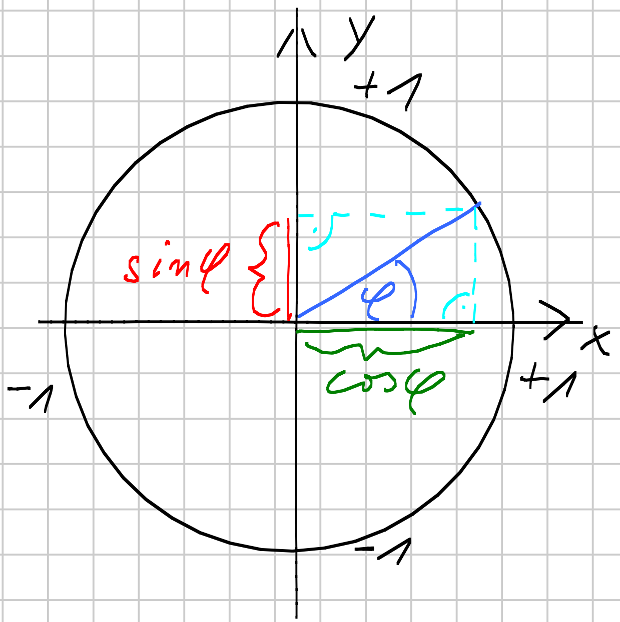
oder $-90^\circ \le \varphi \le 90^\circ$

$0 \ge \cos\varphi \ge -1$ f. $90^\circ \le \varphi \le 270^\circ$

$R = 1 \Rightarrow$ Umfang $= 2\pi \cdot R = 2\pi$

Winkelangabe in Bogenmaß: $\frac{x}{2\pi} = \frac{\varphi}{360^\circ}$ z.B. $\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$

$\pi \mathrel{\hat{=}} 180^\circ$




$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$$

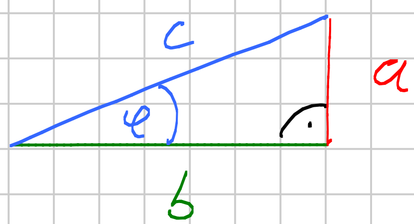
$$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$$

bzw. $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$$

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$$

Rechtwinkliges Dreieck




$a = c \cdot \sin\varphi$ bzw. $\frac{a}{c} = \sin\varphi$

$b = c \cdot \cos\varphi$ bzw. $\frac{b}{c} = \cos\varphi$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi = c^2$

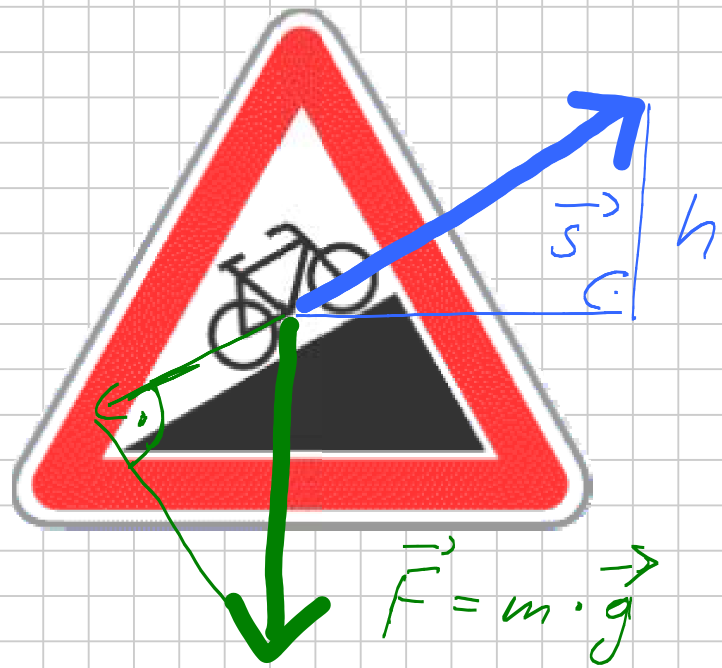
$$\boxed{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1}$$

## 5) Das Skalarprodukt

Skalarprodukt, "inneres Produkt", von Vektoren ergibt einen Skalar

<u>Beispiel</u>:

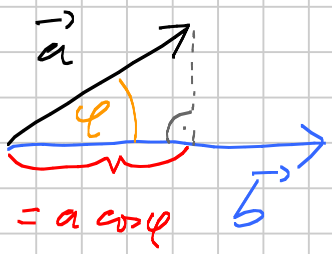
"Arbeit = Kraft mal Weg"



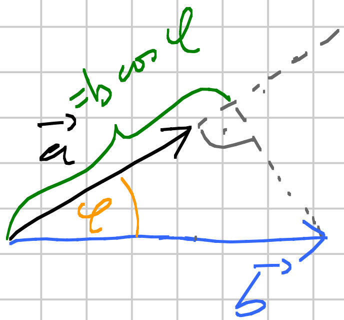

Wieviel Arbeit leistet der Radfahrer?

$$W = |s| \cdot \tilde{f} = |F| \cdot h$$

$$(\vec{a},\vec{b}) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b} := |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = ab\cos\varphi \qquad \varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$




$\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = "Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ $(= a\cos\varphi)$
multipliziert mit $b$ $(= a\cos\varphi\cdot b)$"



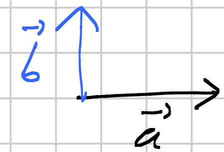

$\Rightarrow$ $\vec{b}\cdot\vec{a}$ = "Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $(= b\cos\varphi)$
multipliziert mit $a$ $(= b\cos a)$"

$\Rightarrow$ Kommutativgesetz: $\boxed{\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$

orthogonale Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

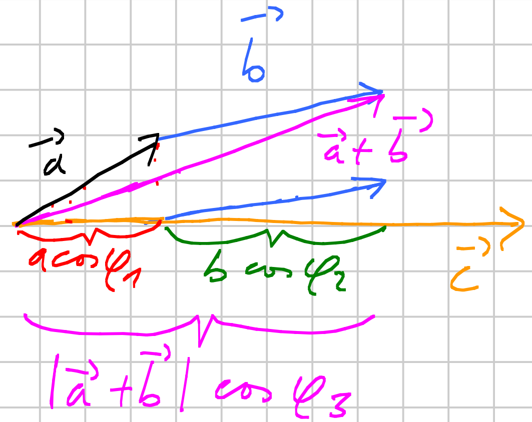
Beweis: $\cos 90° = 0$

oder graphisch:




Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$, bzw. $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $= 0$, wenn $\varphi = 90°$.

Distributivgesetz:




$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

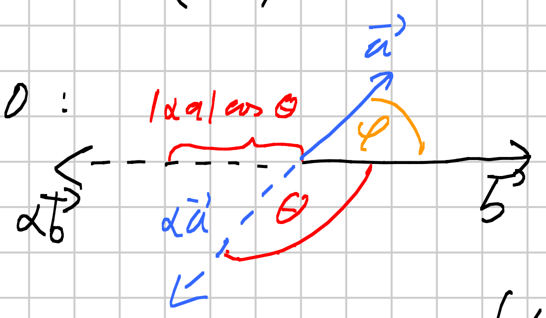
$$|\vec{a}+\vec{b}| \cdot c \cos\varphi_3 = a \cdot c \cos\varphi_1 + b \cdot c \cos\varphi_2$$

**Bilinearität:** $\alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{a}, \vec{b} \in V$

dann gilt $(\alpha \vec{a})\, \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$

**Beweis:** $\alpha > 0$: $(\alpha a) \cos\varphi\, b = a \cos\varphi\, (b \cdot \alpha) = (a \cdot b \cos\varphi) \cdot \alpha$

$\alpha < 0$:

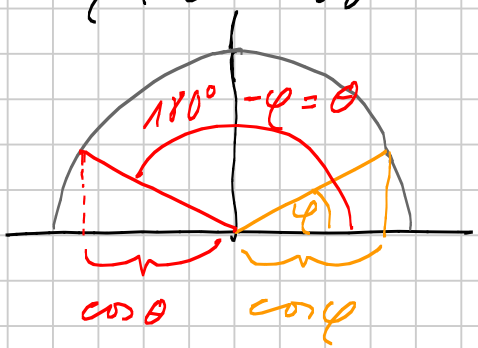



$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\alpha|\, a b \cos\theta = -|\alpha|\, ab \cos\varphi$

$\vec{a}\, (\alpha \vec{b}) = a\, |\alpha|\, b \cos\theta = -|\alpha|\, ab \cos\varphi$

$\alpha\, (\vec{a}\, \vec{b}) = \alpha\, ab \cos\varphi = -|\alpha|\, ab \cos\varphi$

$\varphi + \theta = 180^\circ$




$\Rightarrow \cos\theta = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$

**Betrag eines Vektors** $\quad a = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1}} = a$

**Schwarzsche Ungleichung:** $\quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq a \cdot b$

Beweis: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |a \cdot b \cos\varphi| \leq a \cdot b \quad$ da $\ |\cos\varphi| \leq 1$

**Dreiecksungleichung** $\quad |a-b| \leq |\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b$

Beweis: $\quad -ab \leq \vec{a}\cdot\vec{b} \leq a \cdot b \quad \Longleftrightarrow$ Schwarzsche Ungleichung

$$\Longleftrightarrow \quad a^2+b^2-2ab \leq a^2+b^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} \leq a^2+b^2+2ab$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a-b)^2 \leq (\vec{a}+\vec{b})^2 \leq (a+b)^2$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^{\,2} = a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad |a-b| \leq |\vec{a}+\vec{b}| \leq |a+b| = a+b$$

<u>Bemerkung</u>: Alle obigen Aussagen zum Skalarprodukt sind auch für allgemeine Vektorräume gültig; Beweise jedoch komplizierter.

## Rechnen mit Skalarprodukt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z)\cdot(x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z)$$

$$= x_1x_2\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{=1 \text{ da } |\vec{e}_x|=1} + x_1y_2\underbrace{\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y}_{=0 \text{ da } \vec{e}_x\perp\vec{e}_y} + x_1z_2\vec{e}_x\vec{e}_z + \ldots$$

$$\to = 0 \quad \vec{e}_x \perp \vec{e}_z$$

$$= x_1x_2 + y_1x_2\cdot 0 + y_1y_2\cdot 1 + y_1z_2\cdot 0 + z_1x_2\cdot 0 + z_1y_2\cdot 0 + z_1\cdot z_1$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Bsp.: $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 4 - 1 = 6$

Längen: $a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

$b = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a}\,\vec{b} = a \cdot b \cos\varphi$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6}{14}} \approx 0.65 \Rightarrow \varphi \approx 49^\circ$$

## häufige Schreibweisen und Abkürzungen

„Kronecker-Delta" oder „Kronecker-Symbol":

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Einstein'sche Summenkonvention:

„über mehrfach auftretende Indices wird summiert"

Beispiel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i := \underbrace{a_i b_i}$$

„summiere über 'i', da „i" mehrfach auftritt; $i = 1, 2, 3$ folgt aus dem Kontext!

$$\sqrt{a_k a_k} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} a_k a_k} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\delta_{jj} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{jl}\,\delta_{lk} = \sum_{l=1}^{3} \delta_{jl}\,\delta_{lk} = \underbrace{\delta_{j1}\,\delta_{1k}}_{=\begin{cases}1 & \text{für } j=k=1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} + \underbrace{\delta_{j2}\,\delta_{2k}}_{=\begin{cases}1 & \text{f. } j=k=2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} + \underbrace{\delta_{j3}\,\delta_{3k}}_{=\begin{cases}1 & \text{f. } j=k=3\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} = \delta_{jk} = \begin{cases}1 & \text{f. } j=k\\ 0 & \text{f. } j\neq k\end{cases}$$

$$a_k\,\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} a_k\,\delta_{kl} = a_1\,\delta_{1l} + a_2\,\delta_{2l} + a_3\,\delta_{3l} = a_l$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \delta_{ii} = 3$$

$$c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_k b_k \underbrace{a_j a_l \delta_{jl}}_{= \begin{cases} a_j^2 & \text{f. } j=l \\ 0 & \text{f. } j \neq l \end{cases}} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_k b_k a_j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{3} c_k b_k \sum_{j=1}^{3} a_j^2 = \vec{c}\,\vec{b} \cdot \vec{a}^{\,2} = a^2\, \vec{b} \cdot \vec{c}$$

6) **Vektorprodukt:** "äußeres Produkt" oder "Kreuzprodukt"

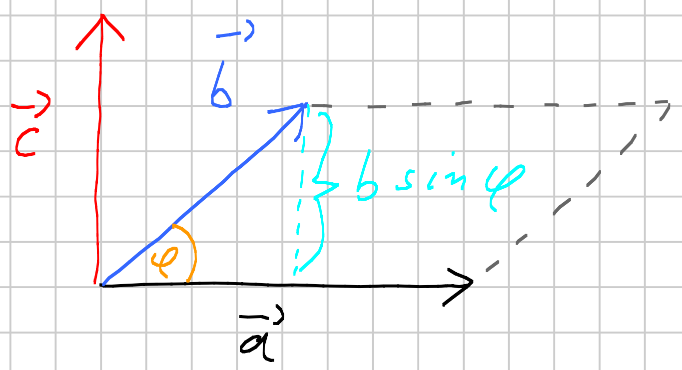
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

mit 1.) $c = ab \sin\varphi \qquad \varphi = \sphericalangle(a,b)$

2.) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

3.) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein rechtshändiges System

**Bem.** Vektorprodukt nur im 3-dimensionalen Raum definiert!

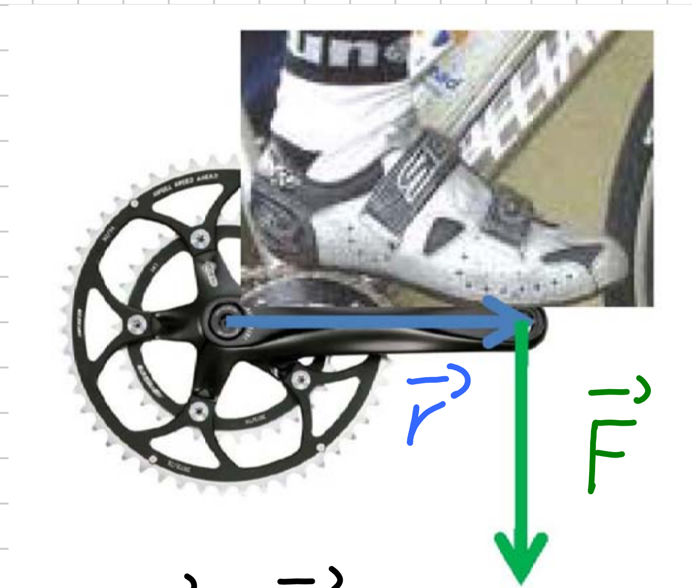



$c$ = Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

<u>Anwendungsbeispiel</u> :

Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$






$\vec{M} \gtrsim 0$

$\vec{M} = \vec{M}_{max}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ falls 1) $\vec{a}$ oder/und $\vec{b} = 0$

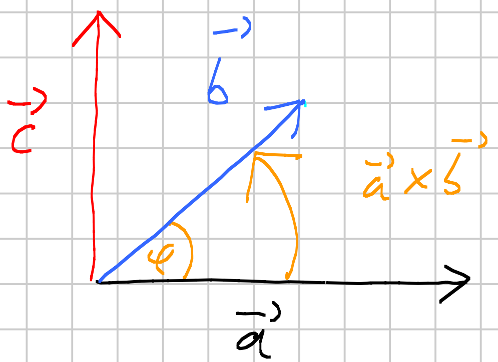
2) $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

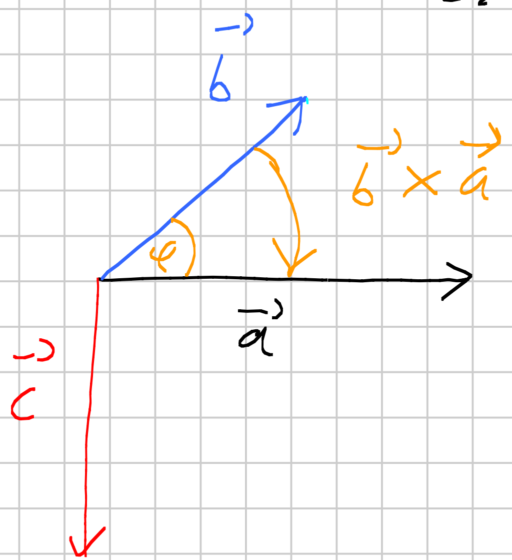
(2 parallele Vektoren spannen keine Fläche auf.)

<u>anti-kommutativ</u> $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

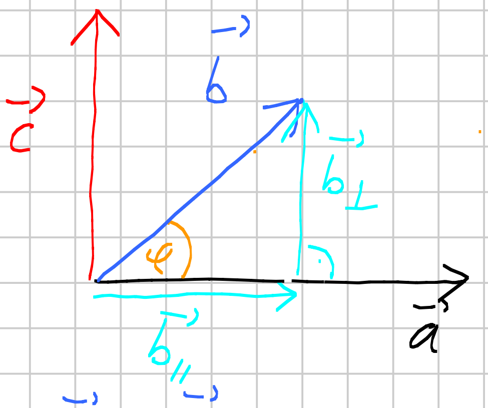
folgt direkt aus Rechtshändigkeit von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

bzw. $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp \times \vec{b} = \vec{c}$$

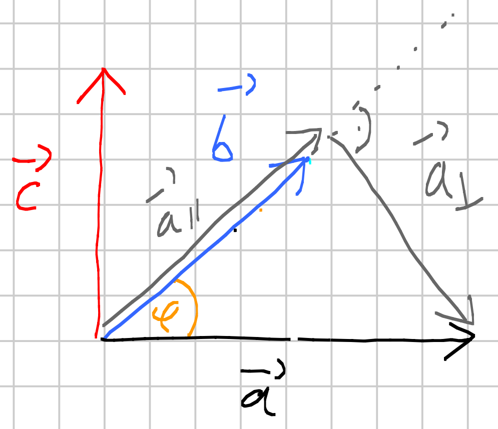



$$\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$$

$$|\vec{b}_\perp| = b \cdot \sin\varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}_\perp| = a \cdot b_\perp \underbrace{\sin 90^0}_{=1} = a\, b_\perp = ab \sin\varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\varphi$$




$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + a_\perp$$

$$|a_\perp| = a \cdot \sin\varphi$$

$$|a_\perp \times b| = a_\perp \cdot b = ab \sin\varphi$$

## Bilinear für reelle Zahlen: $\lambda \in \mathbb{R}$

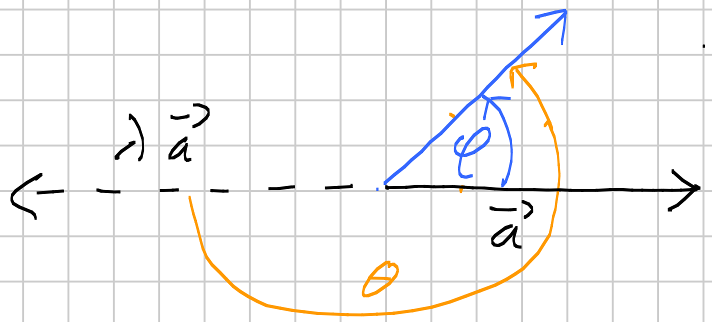
$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$$

Beweis: $\lambda > 0$: $|\lambda\vec{a}\times\vec{b}| = \lambda ab\sin\varphi$

$\lambda < 0$:

$$\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \lambda\vec{c} = -|\lambda|\vec{c}$$

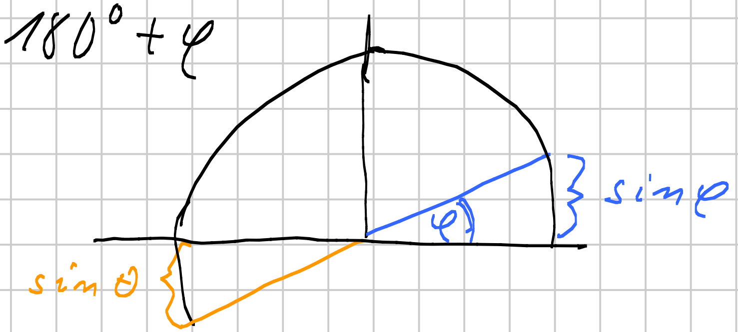
$$|\vec{c}| = ab\sin\varphi$$




$$(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b} = (-|\lambda|\vec{a})\times\vec{b} = -|\lambda|\vec{c}$$

denn $|\lambda|\cdot ab\sin\theta = -|\lambda|ab\sin\varphi$

$\theta = 180^\circ + \varphi$



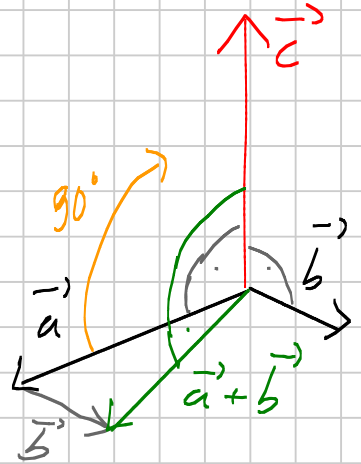

$$\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \vec{a}\times(-|\lambda|\vec{b}) = -|\lambda|\vec{c}$$

denn $a|\lambda|b\sin\theta = -|\lambda|ab\sin\varphi$

$$\sin\theta = \sin(180^\circ+\varphi) = -\sin\varphi$$

**distributiv:** $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Beweis: da $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a}_\perp \times \vec{c}$ gilt, können wir annehmen, dass $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$ ist $\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \perp \vec{c}$




- $\vec{a} \times \vec{c}$ liegt ebenfalls in der $a,b$-Ebene (da $\perp \vec{c}$), ist um 90° zu $\vec{a}$ gedreht und wird mit $|\vec{c}|$ gestreckt

- analoges gilt für $\vec{b} \times \vec{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c}$

$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

da $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot c = c\vec{a} + c\vec{b}$

(gilt auch für die gedrehten Vektoren)

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$ ; da $\sin(0°) = 0$

$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ; denn $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= a c \cos\varphi = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= b c \cos\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \text{ da } \cos 90° = 0$$

Vektorprodukt ist <u>nicht</u> assoziativ: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp$ a,b-Ebene $\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ liegt in a,b-Ebene

$(\vec{b} \times \vec{c}) \perp$ b,c-Ebene $\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ liegt in b,c-Ebene

( Ausnahmefälle, z.B. $\vec{a} = 0$ etc. oder $= 0$ falls $\vec{c} \perp$ a,b-Ebene etc.)

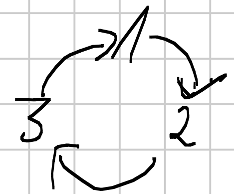
## Rechnen mit Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

denn $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für $i \neq j$, $|\vec{e}_i| = 1$ und $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ rechtshändig.

allgemeiner:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \begin{cases} \vec{e}_k & \text{f. } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -\vec{e}_k & \text{f. } i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$



**noch allgemeiner:**

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{f. } i,j,k \text{ zyklisch Vt. von } 1,2,3 \\ -1 & \text{f. } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

"total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe" (Levi-Civita Tensor)

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k$$

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i \cdot \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = b_i \vec{e}_i \qquad \vec{a} \times \vec{b} = ?$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \vec{a}_3 \vec{e}_3\right) \times \left(b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3\right)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=-\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{=-\vec{e}_3} + a_2 b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + a_3 b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{=-\vec{e}_1}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_3$$

| 231 | 321 | 312 | 132 | 123 | 213 |
|---|---|---|---|---|---|
| zykl. | antiz | zykl | antiz | zykl | antiz. |

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

"auswendig lernen"

"+ zyklisch − antizyklisch"

"Konstruktion" (später: Determinantenbestimmung)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} e_1 & e_2 & e_3 & e_1 & e_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}\right. = \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

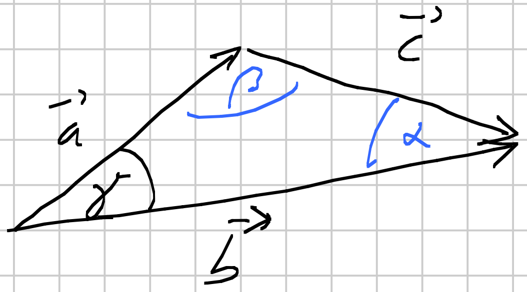
$$+ \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = a_i b_j \, \vec{e}_i \times \vec{e}_j = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \left( = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \right)$$

$$= c_k \vec{e}_k \quad \text{mit} \quad c_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk}$$

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \qquad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \qquad c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

# 7.1 Kosinussatz und Sinussatz:




$$\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

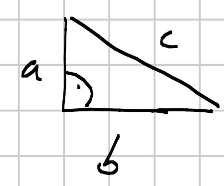
$$c^2 = \vec{c}^{\,2} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{b}$$

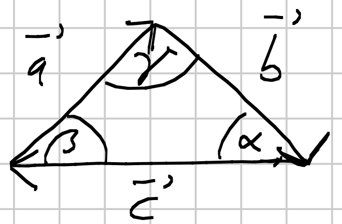
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Spezialfall: $\gamma = 90^\circ \implies c^2 = a^2 + b^2$




$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$\implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{0} - \vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \times -\vec{c} + \underbrace{\vec{a} \times -\vec{a}}_{=0}$$

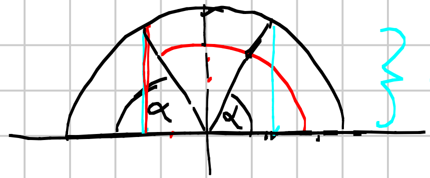
$$= \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\implies \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \quad \text{falls } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0}$$

$$ab\sin(180 - \gamma) = bc\sin(180 - \alpha) = ac\sin(180 - \beta)$$

$\sin\alpha = \sin(180-\alpha)$

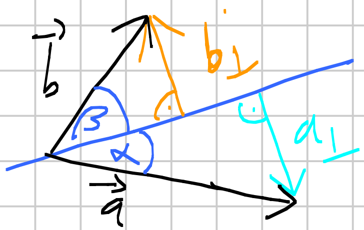


$\} \sin\alpha = \sin(180-\alpha)$

$\Rightarrow \quad ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ac\sin\beta$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

## 7.2 Additionstheoreme




$$\vec a\cdot\vec b = ab\cos(\alpha+\beta) = (\vec a_{\parallel}+\vec a_{\perp})\cdot(\vec b_{\parallel}+\vec b_{\perp})$$

$$= a_{\parallel}\cdot b_{\parallel} - a_{\perp} b_{\perp} \qquad (\text{denn } \cos 0 = 1 \text{ u. } \cos 90^\circ = 0)$$

$$= a\cos\alpha\, b\cos\beta - a\sin\alpha\, b\sin\beta \qquad (\cos 180^\circ = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$|\vec a\times\vec b| = ab\sin(\alpha+\beta) = (\vec a_{\parallel}+\vec a_{\perp})\times(\vec b_{\parallel}+\vec b_{\perp}) = a_{\parallel} b_{\perp} + a_{\perp} b_{\parallel}$$

$$= a\cos\alpha\, b\sin\beta + a\sin\alpha\, b\cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}$$

## 7.3 Entwicklungssatz: "bac − cab" − Regel

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{p}$$

($\vec{p}$ liegt in $\vec{b}\,\vec{c}$-Ebene !)

$\vec{p} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{p}\cdot\vec{a} = 0 = \beta\, \vec{b}\cdot\vec{a} + \gamma\, \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$

definiere $\alpha := \dfrac{\beta}{\vec{a}\cdot\vec{c}} \Rightarrow \gamma = -\dfrac{\beta}{\vec{c}\cdot\vec{a}}\, \vec{b}\cdot\vec{a} = -\alpha\, \vec{b}\,\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{p} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \underbrace{\boxed{\alpha\left[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})\right] = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})}}_{\text{das gilt allgemein}}$$

das gilt allgemein, nun bestimmen wir $\alpha$ durch geschickte Wahl des Koordinatensystems:

lege x-Achse parallel zu $\vec{b}$, und y-Achse in $(b, c)$-Ebene

<u>Bem:</u> diese Wahl funktioniert immer, außer wenn $\vec{b} = 0$ oder $\vec{c} = 0$ oder $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ist; in diesem Spezial-Fällen gilt jedoch $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 = [\vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})]$.

für $\vec{e}_1 \parallel \vec{b}$ und $\vec{e}_2$ in der $(b,c)$-Ebene folgt

$\vec{b} = b\,\vec{e}_1$ und $\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$ $\quad\quad \vec{e}_3 \perp \vec{b}, \vec{c}$-Ebene

dann gilt:

$$\vec{b} \times \vec{c} = b c_2 \vec{e}_3$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = b c_2 \; \vec{a} \times \vec{e}_3 = b c_2 \Big( a_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{= -\vec{e}_2} + a_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{= \vec{e}_1} + a_3 \cdot 0 \Big)$$

$$= b c_2 a_2 \vec{e}_1 - b c_2 a_1 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_2 b c_2 \\ -a_1 b c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

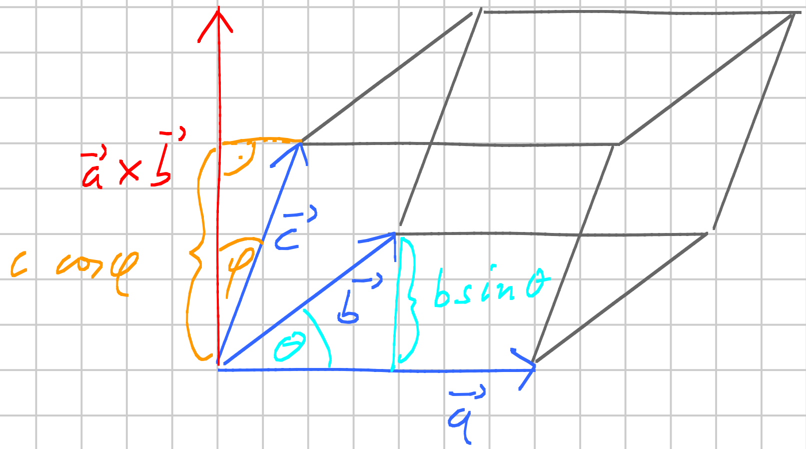
$$= \alpha \cdot \left[ \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}) \right] = \alpha \cdot \left[ b \vec{e}_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2) - (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2)(a_1 b) \right]$$

$$= \alpha \cdot \left[ b c_2 a_2 \vec{e}_1 - b c_2 a_1 \vec{e}_2 \right] = \alpha \begin{pmatrix} a_2 b c_2 \\ -a_1 b c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

# 7.4 Spatprodukt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a\,b\,c \sin\theta \cos\varphi$$

$$\theta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \varphi \sphericalangle((\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c})$$




Volumen = Grundfläche × Höhe

= Länge $a$ × Breite $b \sin\theta$ × Höhe $c \cos\varphi$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il}$ zykl. vertauschen

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{e}_i \; b_j c_k \varepsilon_{jkl} \vec{e}_l = a_i b_j c_k \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a}$$

$$V = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon_{kij} c_k a_i b_j = \varepsilon_{jki} b_j c_k a_i$$

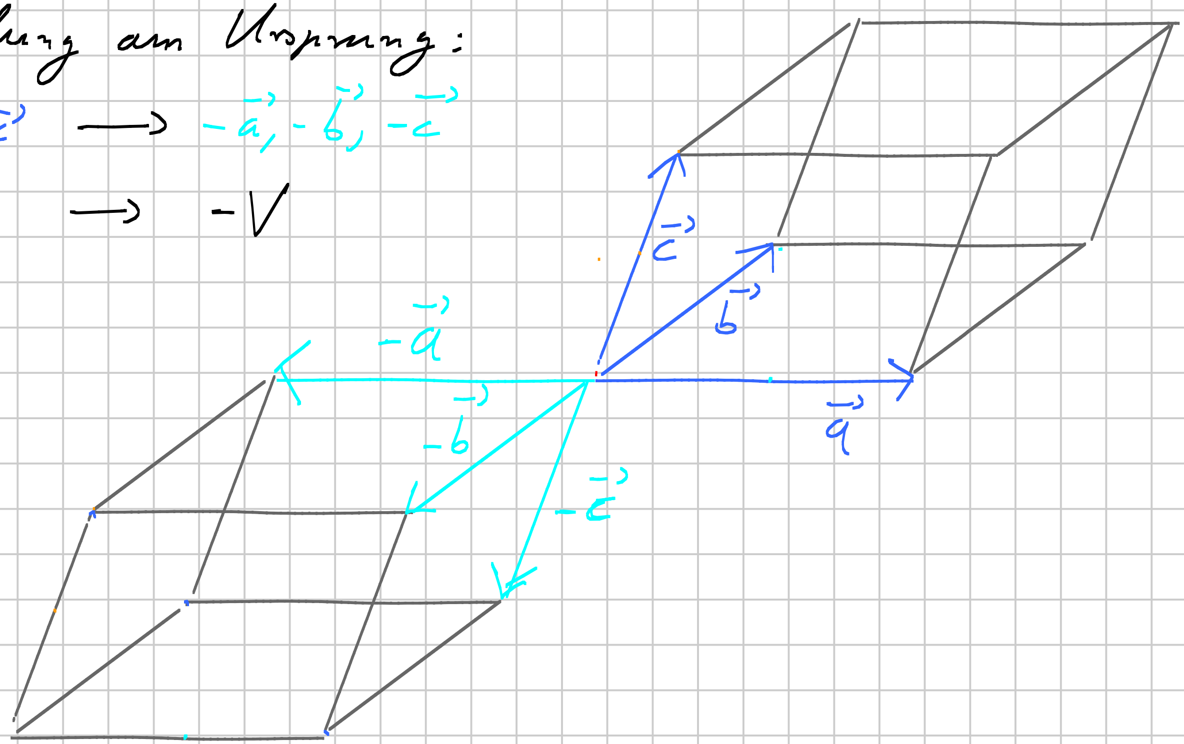
$i, j, k$ zyklisch vertauscht: $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} (\vec{c} \times \vec{a})$

antizyklisch vertauschen: $V' = \varepsilon_{ikj}\, a_i c_k b_j = -\varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k = -V$

Spiegelung am Ursprung:

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \longrightarrow -\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c}$

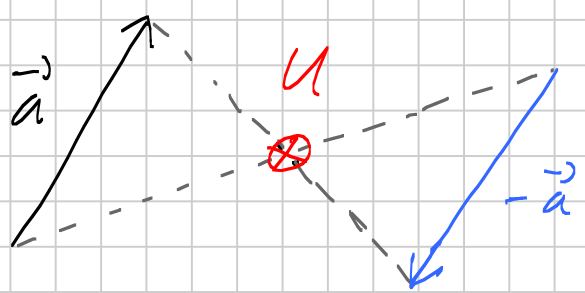
$\Rightarrow V \longrightarrow -V$




$\Rightarrow$ $\boxed{V' \text{ bzw. } V \text{ ist "Pseudoskalar"}}$

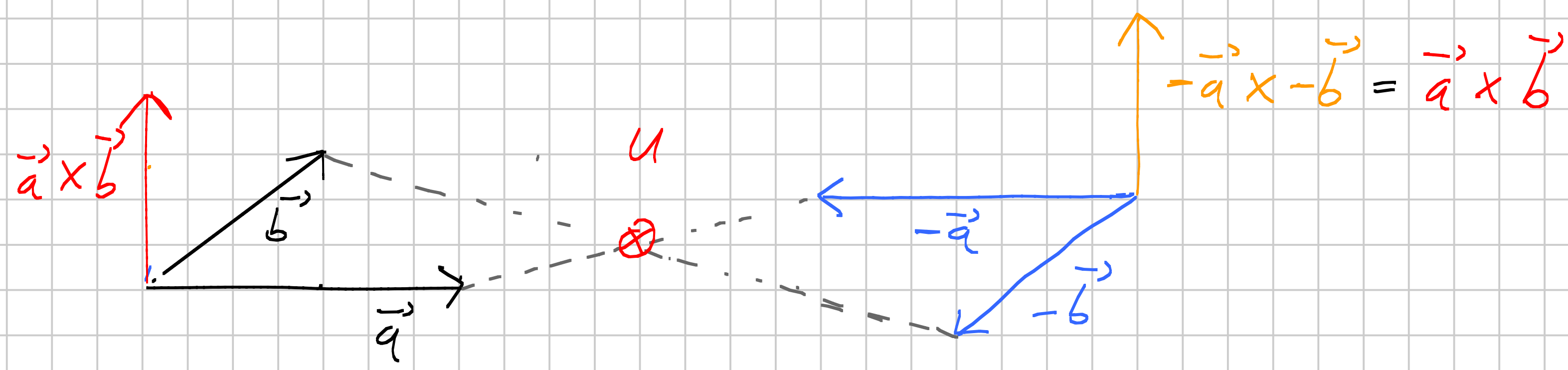
## 7.5 Polare und axiale Vektoren:

"was passiert bei Spiegelung am Ursprung?" (≙ räumliche Inversion)




polare Vektoren ändern das Vorzeichen bei räumlicher Inversion

axiale Vektoren bleiben unverändert




⇒ Vektorprodukt beschreibt einen axialen Vektor (Pseudovektor)

Vektorprodukt beschreibt einen Drehsinn (Rechtsschraube)

## 8) Drehmatrizen:

Ziel ist die Beschreibung von Drehungen um beliebige Achsen und Winkel. 2 mögliche Zugänge

a) wir drehen die Vektoren in einem festen Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}' = a_i' \vec{e}_i \qquad \vec{a}' \neq \vec{a}$$

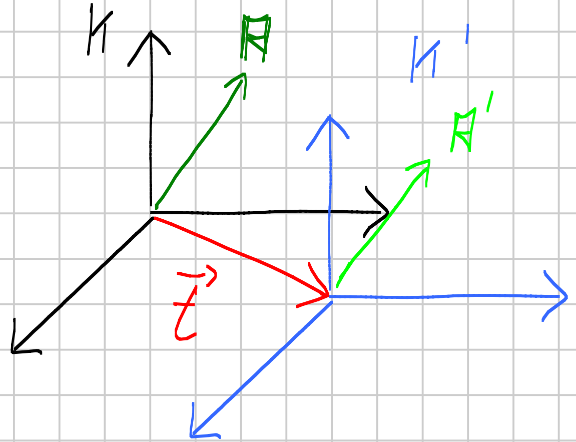
b) wir halten die Vektoren fest und drehen das Koordinatensystem

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \overset{!}{=} a_i' \vec{e}_i'$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ beschreiben 2 jeweils rechtshändige Koordinatensysteme mit gleichem Ursprung

<u>Bem</u>: zusätzlich könnten die Ursprünge noch um $\vec{t}$ gegeneinander verschoben sein.

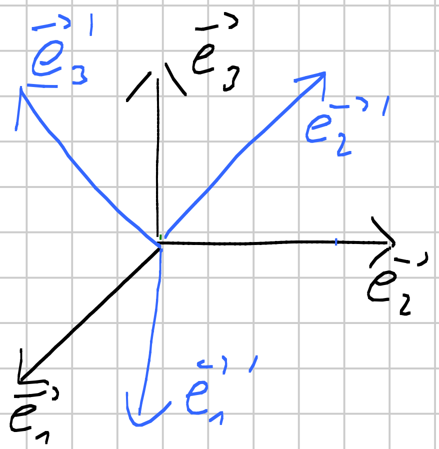
Ohne Drehung gilt dann:




- beliebige Vektoren haben die gleichen Koordinaten in K und K', denn $\vec{t}$ bewirkt nur eine Parallelverschiebung
- Ortskoordinaten werden um $\vec{t}$ geändert

$$\overrightarrow{OA} = a_i \vec{e}_i = -\vec{t} + \underbrace{a_i \vec{e}_i\,'}_{\overrightarrow{O'A'}}$$

## Drehung des Koordinatensystems:




$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_i' \vec{e}_i\,'$$

$$\vec{e}_i\,' = d_{ij} \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_k = \cos(\vec{e}_i\,', \vec{e}_k) = d_{ij} \underbrace{\vec{e}_j \vec{e}_k}_{\delta_{jk}} = d_{ik}$$

$d_{ik} = \cos(\vec{e}_i{}', \vec{e}_k) = \cos \varphi_{ik}$ $\quad \varphi_{ik}$ = Winkel zw. der $i'$-Achse und der $k$-Achse

Gesamtheit der $d_{ik}$ beschreibt eine $3 \times 3$ Drehmatrix

$$D = (d_{ij}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_i{}' = d_{ij}\,\vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij} = d_{ik}\,\vec{e}_k\, d_{jl}\,\vec{e}_l = d_{ik}\, d_{jl}\, \underbrace{\vec{e}_k\, \vec{e}_l}_{=\delta_{kl}} = d_{ik}\, d_{jk}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{jk} = \delta_{ij}} \Rightarrow \text{„}D \text{ ist orthonormiert"}$$

Zeilen-vektoren $\vec{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{pmatrix}$ bilden Orthonormalsystem

$$\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j = \delta_{ij}$$

Wir betrachten nun die inverse Drehung von $K'$ nach $K$.

d.h. $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\, \vec{e}_j\,'$ $\qquad D^{-1} = \left(\tilde{d}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix}$

dann gilt $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\, \underbrace{d_{jk}\, \vec{e}_k}_{\vec{e}_j\,' =}$

und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l = \delta_{il} = \tilde{d}_{ij}\, d_{jk}\, \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{kl}} = \tilde{d}_{ij}\, d_{jk}\, \delta_{kl}$

$\Rightarrow \quad \delta_{il} = \tilde{d}_{ij}\, d_{jl}$

Zeilenvektor von $D^{-1}$ $\qquad$ Spaltenvektor von $D$

$$\boxed{\vec{\tilde{d}}_i^{\,z} \cdot \vec{d}_l^{\,s} = \delta_{il}}$$

Es gilt: 1.) $\vec{e}_i\,' = d_{ij}\, \vec{e}_j$ $\qquad \vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_k = d_{ij}\, \vec{e}_j\, \vec{e}_k = d_{ij}\, \delta_{jk}$

$\Rightarrow \vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_k = d_{ik}$

2.) $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\, \vec{e}_j\,' \Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\,' = \tilde{d}_{ik} \qquad \Rightarrow \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i\,' = \tilde{d}_{ki}$

$\Rightarrow \boxed{d_{ik} = \tilde{d}_{ki}}$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}$$

mit $D^{-1} \cdot D = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren von $D$ und $D^{-1}$ bilden Orthonormalsystem

$\Rightarrow$ Zeilenvektoren von $D^{-1}$ und $D$ bilden Orthonormalsystem

# 9) Matrizen und Determinanten

Def.: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$  „$\overset{\text{Zeilen}}{n} \times \overset{\text{Spalten}}{m}$ - Matrix"

$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

quadratische Matrix $\iff n = m$

diagonale Matrix $\iff a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \iff a_{ij} = a_i \, \delta_{ij}$

Einheitsmatrix $\iff \underline{\underline{1}} = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$  $e_{ij} = \delta_{ij}$

$i$-ter Zeilenvektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im})$  $(1 \times m)$-Matrix

$j$-ter Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  $(n \times 1)$-Matrix

Zeilenrang: Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Spaltenrang: Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren

Es gilt für jede beliebige Matrix:

Spaltenrang = Zeilenrang = Rang einer Matrix

<u>Beispiel:</u> (statt Beweis)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeilenrang $= 2$, denn $\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{matrix}$

Spaltenrang $= 2$, denn

1.) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

2.) $\beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{matrix}$

## 9.1 Rechenregeln für Matrizen:

- skalare Multiplikation: $A = (a_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})$
- Addition von Matrizen: $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ sind $(m \times n)$-Matrizen. Dann gilt $C = A + B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  d.h. $C$ ist ebenfalls eine $(m \times n)$-Matrize
- Multiplikation von Matrizen:
  $A = (a_{ij})$ sei $(m \times n)$-Matrize, $B = (b_{ij})$ eine $(n \times r)$-Matrize

wichtig! Spaltenzahl $n$ von $A$ = Zeilenzahl $n$ von $B$

dann ist $C = A \cdot B = (c_{ij})$ eine $(m \times r)$-Matrize

$$\text{mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}$$

$c_{ij}$ ist das Skalarprodukt des $i$-ten Zeilenvektors von $A$ mit dem $j$-ten Spaltenvektor von $B$.

$$\begin{pmatrix} \cdots & & \\ \cdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \\ \cdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & b_{1j} & \vdots & \vdots \\ & & \vdots & & \\ & & b_{nj} & & \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 \cdots & i & \cdots \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cdots\cdots & \vdots & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Nur für quadratische $(n \times n)$ Matrizen existiert $A \cdot B$ und $B \cdot A$,

aber i.a. gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

denn $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) \neq \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}\right)$

Nachfolgend werden nur noch quadratische Matrizen betrachtet.

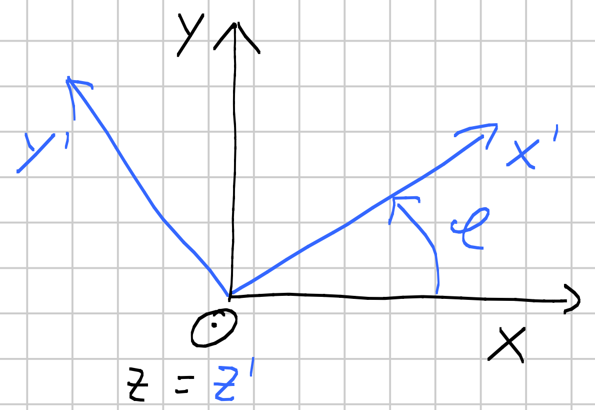
symmetrische Matrix : $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = a_{ij}$

transponierte Matrix : $A = (a_{ij})$ $\quad A^T = (a_{ji})$

inverse Matrix : $A = (a_{ij})$ $\quad A^{-1} \cdot A = E = (\delta_{ij})$

Für Drehmatrizen gilt : $D^{-1} = D^T$ d.h. $D^T \cdot D = E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

<u>Beispiel</u>: Drehung um z-Achse um den Winkel $\varphi$




$d_{ik} = \cos(\vec{e}_i{}', \vec{e}_k)$

$d_{11} = \cos\varphi \qquad d_{22} = \cos\varphi$

$d_{12} = \cos(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2) = \cos(90^\circ - \varphi)$

$= \sin\varphi$

$d_{21} = \cos(\vec{e}_2{}', \vec{e}_1) = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin$

$d_{33} = \cos 0^\circ = 1 \qquad d_{13} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = \cos 90^\circ = 0$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D^{-1} \mathrel{\hat{=}}$ Drehung um $-\varphi$ $\quad K' \to K$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D^T$$

$$D^{-1} D = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi + (-\sin\varphi)^2 & \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

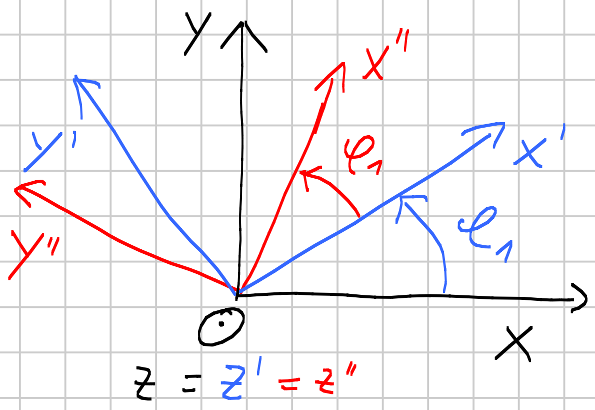
2 Drehungen nacheinander um $\varphi_1$ und $\varphi_2$ jeweils um z-Achse

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtdrehung:

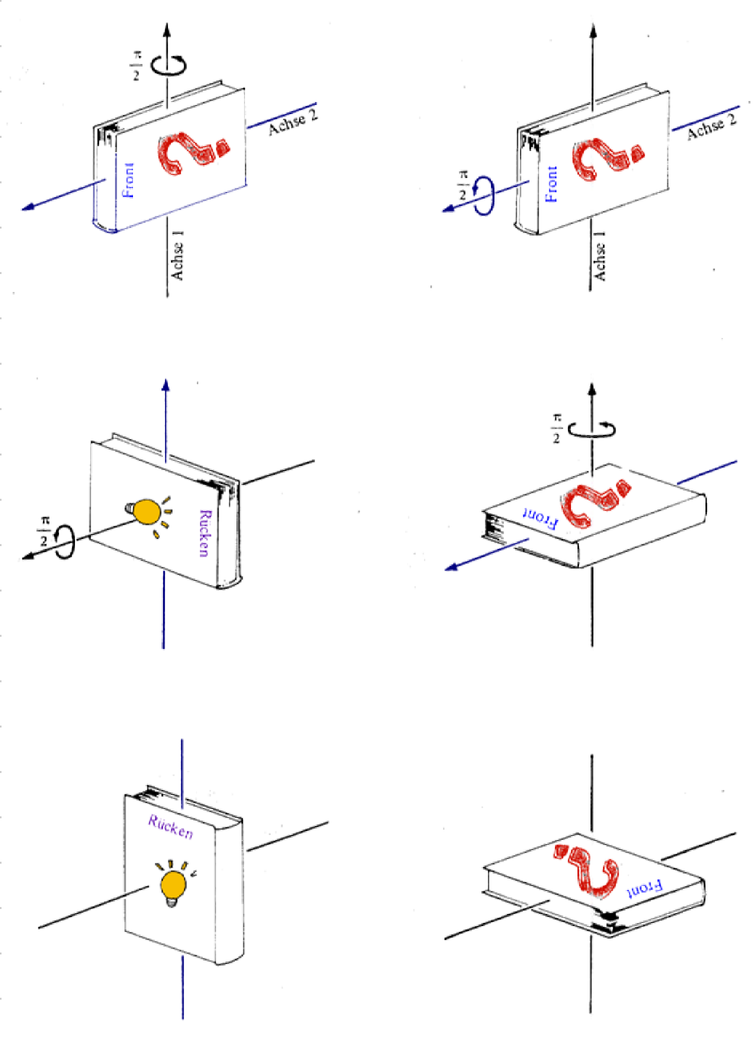
$$D = D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 & -\sin\varphi_2 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) & \sin(\varphi_2 + \varphi_1) & 0 \\ -\sin(\varphi_2 + \varphi_1) & \cos(\varphi_2 + \varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




Bei Drehungen um die gleiche Achse addieren sich die Drehwinkel.

# Drehungen um verschiedene Achsen




- Winkel addieren sich nicht
- Reihenfolge der Drehungen muss beachtet werden.

$$\boxed{\begin{aligned} D_{ges} &= D_2 \cdot D_1 \\ D_2 \cdot D_1 &\neq D_1 \cdot D_2 \end{aligned}}$$

## 9.2 Determinanten:

Definition: $A = (a_{ij})$ ist eine $(n \times n)$-Matrix. Dann ist die

Determinante $\quad \mathrm{Det}\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \mathrm{sign}(P)\, a_{1P(1)} \cdot a_{2P(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nP(n)}$

$[P(1) \dots P(n)] = P(1, 2, \dots, n)$ eine Permutation der Folge $(1, 2, \dots, n)$

summiert wird über alle möglichen Permutationen.

es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ Summanden; $\mathrm{sign}(P) = \pm 1$

Permutation = mehrfache Anwendung von Transpositionen (Vertauschungen) benachbarter Elemente

Beispiel: $P(123) = (231) \qquad (123) \to (213) \to (231)$

$\mathrm{sign}(P) = \pm 1$ bei $\begin{matrix}\text{gerader} \\ \text{ungerader}\end{matrix}$ Anzahl von Transpositionen

Beispiele: $A = (a_{11}) \implies \det A = a_{11}$

$n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad 2! = 2$ $\quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$

$n=3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad 3! = 6$

| | sign p |
|---|---|
| 1 2 3 | +1 |
| 1 3 2 | −1 |
| 2 1 3 | −1 |
| 2 3 1 | +1 |
| 3 2 1 | −1 |
| 3 1 2 | +1 |

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

D.h.: wir entwickeln Det A nach der 1. Zeile

- $\mathsf{A} = (3\times 3)$-Matrix : $\operatorname{Det} \mathsf{A}$ = Summe von 3 Det. von $(2\times 2)$-Teilmatrizen
- $\mathsf{A} = (2\times 2)$-Matrix : $\operatorname{Det} \mathsf{A}$ = Summe von 2 Det. von $(1\times 1)$-Teilmatrizen

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

## Entwicklungssatz von Laplace:

"Unterdeterminante" $\mathsf{A}_{ij}$ : Determinante der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die aus $\mathsf{A}$ durch Streichen von Zeile $i$ und Spalte $j$ entsteht.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Det} \mathsf{A} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \mathsf{A}_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \mathsf{A}_{ij} \end{aligned}}$$

Entwickeln nach $i$-ter Zeile bzw. nach $j$-ter Spalte

(keine Summenkonvention)

$\boxed{\text{"algebraisches Komplement": } \mathcal{U}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & a_{ij} & \cdots & a \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \det\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} \det\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

<u>Bem:</u> Man entwickelt sinnvollerweise nach der Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen.

"Regel von Sarrus" für 3×3-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (+) \quad (+) \quad (+)$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

## 9.3 Rechenregeln für Determinanten:

– Multiplikation einer Zeile: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

entwickeln nach i-ter Zeile $\Rightarrow \det \tilde{A} = \lambda \cdot \det A$

$$\det \lambda \cdot A = \lambda^n \cdot \det A$$

– Addition einer Zeile

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

folgt aus Entwicklungssatz nach 1. Zeile

- Vertauschen benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen von $\det A$
  folgt aus dem Entwicklungsatz wegen $(-1)^{i+j}$

- sind 2 Zeilen identisch, dann ist $\det A = 0$
  vertausche benachbarte Zeilen solange bis identische Zeilen benachbart sind, vertausche die beiden $\Rightarrow \det A = -\det A = 0$

- Addition von Zeilen ändert die Determinante nicht

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \cdots & \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\substack{= 0, \text{ da } 2 \\ \text{identische Zeilen}}}$$

- Multiplikationstheorem $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
(ohne Beweis; nachrechnen für $2\times2$- bzw. $3\times3$-Matrix)

- weiterhin gilt $\det A^T = \det A$
entwickeln nach Zeile oder Spalte

- Matrix mit Dreiecksgestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

folgt aus Entwicklungssatz für die letzte Zeile, der $(n-1)$-fach angewendet wird

$E$ = Einheitsmatrix $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$

- inverse Matrix $\quad A^{-1} \cdot A = E$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{denn} \quad \det(A^{-1} \cdot A) = \det A^{-1} \cdot \det A = 1$$

Umkehrung: falls $\det A \neq 0$ existiert $A^{-1}$, so dass $A^{-1} \cdot A = 1$
(ohne Beweis)

## 9.4 Anwendungen der Determinanten:

- Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{e}_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- Spatprodukt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

→ Berechnung der inversen Matrix $\quad A^{-1} = (a_{ij})^{-1} = (b_{ij})$

$$A^{-1} A = \mathbb{1} = E \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\boxed{b_{ji} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\tilde{a}_{ij})}{\det(a_{ij})}}$$

umgekehrte Reihenfolge!

$(\tilde{a}_{ij})$ entsteht aus $(a_{ij})$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte ⇒ "algebraisches Komplement" $U_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{a}_{ij})$

<u>Bsp:</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\mathrm{Det}(A)}} \begin{pmatrix} (-1)^2 d & (-1)^3 b \\ (-1)^3 c & (-1)^4 a \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 10) Lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots \quad &= b_2 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

"homogenes" Gleichungssystem, falls $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$
ansonsten "inhomogenes" Gleichungssystem

multipliziere jede Gleichung mit dem algebraischen Komplement $U_{ik}$ (für festes $k$) und summiere über alle Zeilen $n$.

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\, U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot U_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, U_{ik} \right)}_{=0 \text{ für } j \neq k} x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i\, U_{ik}$$

<u>Beweis:</u> $\operatorname{Det} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, U_{ij}$ (Entwicklungssatz)

Matrize $\tilde{A}$ sei identisch mit $A$, aber Spalte $k$ durch Spalte $j$ ersetzt

$\Rightarrow \det \tilde{A} = 0$, da 2 identische Spalten vorhanden $(\tilde{a}_{ik} = a_{ij})$

$$\det \tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\, U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, U_{ik} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, U_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ \det A & \text{für } j = k \end{cases}}$$

Das bedeutet $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} U_{ik}}_{= \det A} x_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}}_{= \det \tilde{A}_k}$

Die Matrix $\tilde{A}_k$ ist identisch mit $A$, Spalte $k$ wird jedoch durch $b$ ersetzt; d.h. $\tilde{a}_{ik} = b_i$ $\Rightarrow \det \tilde{A}_k = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ik} U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$

$\Rightarrow \det A \cdot x_k = \det \tilde{A}_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_k = \frac{\det \tilde{A}_k}{\det A}}$

$\Rightarrow$ 1) inhomogenes lineares Gleichungssystem ist nur lösbar, wenn $\det A \neq 0$

2) Die Lösung $(x_1, \dots, x_n)$ ergibt sich durch $x_k = \frac{\det \tilde{A}_k}{\det A}$

$k = 1, \dots, n$ ; dabei ergibt sich $\tilde{A}_k$ aus $A$ indem die $k$-te Spalte $a_{kj}$ durch $b_j$ $(j=1,\dots n)$ ersetzt wird.

## "Cramersche Regel"

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\det A = 2 + 5 - 9 - (10 - 3 + 3) = -12$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\det \tilde{A}_1 = 4 - 12 - (-6 + 4) = -6$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{matrix}$$

$$\det \tilde{A}_2 = 4 + 10 - (20 + 6) = -12$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\det \tilde{A}_3 = 20 - 18 - (20 - 12) = -6$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = \frac{1}{2}}$$

## homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad b_1 = b_2 \ldots = b_n = 0$$

$$\Rightarrow \det \tilde{A}_k = 0 \quad \forall\, k = 1 \ldots n \qquad \Rightarrow \quad \boxed{x_k \det A = 0}$$

$\Rightarrow$ – falls $\det A \neq 0$ nur triviale Lösung $x_i = 0 \ \forall i$

– nicht-triviale Lösung $\Leftrightarrow \det A = 0$

$\det A = 0 \Leftrightarrow$ $l$ Spalten (Zeilen) ergeben sich aus Linear-kombinationen der anderen $m = n - l$ Spalten (Zeilen)

Nun wird umsortiert:

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1m} x_m = -\left( a_{1m+1} x_{m+1} + \dots + a_{1n} x_n \right)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mm} x_m = -\left( a_{mm+1} x_{m+1} + \dots + a_{mn} x_n \right)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}}_{= A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad b_i = -\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j$$

mit $\det A' \neq 0$ dann gilt $\quad x_k = \dfrac{\det \tilde{A}'_k}{\det A'} \quad k = 1, \dots, m$

$\tilde{A}'_k$ ergibt sich aus $A'$ durch ersetzen der Spalte $k$ durch $\vec{b}$.

Lösung enthält frei wählbare Parameter $x_{m+1}, \dots, x_n$.

**Beispiel:**

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$ (Zeile 3 = 4 x Zeile 1)

$\Rightarrow$ umschreiben:

$$x_1 + 4x_2 = x_3$$
$$2x_1 - 3x_2 = -x_3$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A' = -3 - 8 = -11$$

$$\tilde{A}_1' = \begin{pmatrix} x_3 & 4 \\ -x_3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det \tilde{A}_1' = -3x_3 + 4x_3 = x_3$$

$$\tilde{A}_2' = \begin{pmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{pmatrix} \qquad \det \tilde{A}_2' = -x_3 - 2x_3 = -3x_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_3}{-11} \\ x_2 &= \frac{3x_3}{11} \end{aligned}}$$

# 10.1 Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\vec{x} = \vec{b}}$$

① $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$: $\iff$ ex $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}\,\vec{x} = \boxed{\vec{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\vec{b}}$$

$\det A \neq 0$ und $\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$

② $\det A = 0$ und $\vec{b} = 0$:

umschreiben: $\underline{\underline{A}}'\,\vec{x}\,' = \underline{\underline{A}}''\,\vec{x}\,''$

$n = m + l$

$$\underset{(m\times m)}{\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{pmatrix}} \underset{(m\times 1)}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}} = - \underset{(m\times l)}{\begin{pmatrix} a_{1m+1} & \dots & a_n \\ & & \\ a_{m\,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} \underset{(l\times 1)}{\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \det \underline{\underline{A}}' = 0 \\ \Rightarrow \underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{1}} \\ \Rightarrow \vec{x}\,' = \underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}''\,\vec{x}\,'' \end{gathered}}$$

# 10.2 Eigenwerte berechnen

Gesucht sind Eigenwerte $\lambda$ und Eigenvektoren $\vec{a}$, die folgende Gleichung erfüllen: $\underline{\underline{A}}\ \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

d.h. der Vektor $\vec{b} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}$ ist parallel zu $\vec{x}$

umschreiben $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} - \lambda\ \underline{\underline{1}}\ \vec{x} = \left( \underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{1}} \right) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ nur lösbar für $\det\left( \underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{1}} \right) = 0$

d.h. $\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ Lösung liefert die Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_k$. $(k \leq n)$

nun gilt für jeden Eigenwert $\lambda_i$ die Gleichung

$$\underline{\underline{A}}\,\vec{x} = \lambda_i\,\vec{x} \iff \left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{1}}\right)\vec{x} = 0$$

Das heißt: wir müssen dieses homogene GLS für jeden Eigenwert $\lambda_i$ lösen.

Dazu benutzen wir das oben beschriebene Verfahren (2).

sei $\underline{\underline{A}}_{\lambda_i} = \left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \cdot \underline{\underline{1}}\right)$ ; dann schreiben wir die Gleichung

um in $\underline{\underline{A}}'_{\lambda_i}\,\vec{x}\,' = \underline{\underline{A}}''_{\lambda_i}\,\vec{x}\,''$ mit $\det \underline{\underline{A}}'_{\lambda_i} \neq 0$

dann gilt für die Eigenvektoren $\boxed{\vec{x}\,' = \underline{\underline{A}}'^{-1}_{\lambda_i}\,\underline{\underline{A}}''_{\lambda_i}\,\vec{x}\,''}$

## Anwendungsbeispiel

Wir drehen zuerst um die z-Achse dann um die neue x-Achse jeweils um 90°. Lässt sich dies durch eine einzige Drehung ersetzen? Um welche Achse?

Drehmatrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ 0 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$ "um x'-Achse" $\qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ "um z-Achse"

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ \implies \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 1 \qquad \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 0$$

Gesamtdrehung: $D = D_{x'} \cdot D_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$

"Vektoren parallel zur Drehachse ändern sich nicht"

Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$\det A_1 = 0$, denn $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ umschreiben $\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = x_2 = x_3$

$\Rightarrow$ Drehachse: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 11) Nicht-kartesische Koordinatensysteme:

Warum verwendet man "krumme" Koordinatensysteme?

Wir passen das Koordinatensystems an die Symmetrie des zu beschreibenden Systems an!

Beispiele:

1) Lage eines Ortes auf der Erde

kartesisch: x, y, z gemessen von z.B. Erdmittelpunkt

praktischer → Polarkoordinaten

Längen- und Breitengrad (Winkel)

und Höhe (ü. NN bzw. vom Mittelpkt)

2.) Kristalle

aufgebaut aus Elementarzellen (EZ)

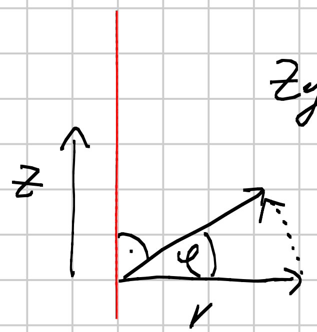
EZ = Würfel $\Rightarrow$ kartesisches Koordinatensystem

EZ = Quader $\Rightarrow$ rechtwinkliges Koordinatensystem, aber verschiedene Maßeinheiten in x, y, z

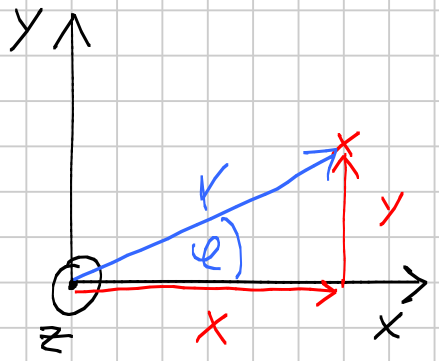
EZ = Parallelepiped $\Rightarrow$ schiefwinkliges Koordinatensystem

3) Elektrisches Feld eines langen, geraden Drahts

Zylinderkoordinaten: senkrechter Abstand r, Winkel $\varphi$ und Höhe z



# Zylinderkoordinaten: (ebene Polarkoordinaten)




kartesisch $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$

Zylinder $(r, \varphi, z)$

es gilt $x_1 = r \cos\varphi$ und $x_2 = r \sin\varphi$ $\quad x_3 = z$

jeder Punkt $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $-\infty \leq z \leq +\infty$ lässt sich eindeutig durch $x_1$, $x_2$ und $x_3$ ausdrücken

$\Rightarrow$ Transformation $(r, \varphi, z) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ ist eindeutig

Rücktransformation $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (r, \varphi, z)$ ist eindeutig außer für $x_1 = x_2 = 0$

$$(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3) \longrightarrow (r = 0,\ \varphi,\ z = x_3)$$

für $r = 0$ ist $\varphi$ beliebig;

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x_1}{r} & \text{f. } x_2 \geq 0,\ r > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x_1}{r} & \text{f. } x_2 < 0,\ r > 0 \\ \text{beliebig} & \text{f. } r = 0 \end{cases} \qquad z = x_3$$

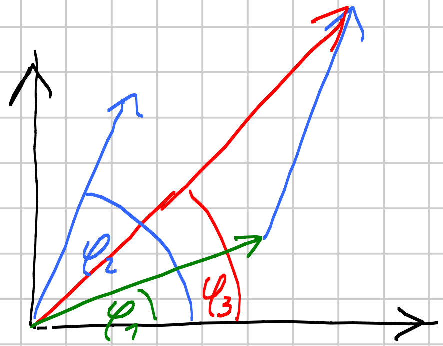
## Rechnen mit Zylinderkoordinaten

– Addition $\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ $\quad a_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = ?$

$\longrightarrow$ kartesische Koordinaten: $\vec{a} = \begin{pmatrix} r_1 \cos\varphi_1 \\ r_1 \sin\varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \cos\varphi_2 \\ r_2 \sin\varphi_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2 \\ r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$




$$r_3 = \sqrt{r_1^2 \cos^2\varphi_1 + r_2^2 \cos^2\varphi_2 + 2 r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + r_1^2 \sin^2\varphi_1 + r_2^2 \sin^2\varphi_2 + 2 r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)}$$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} \arccos \dfrac{r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2}{r_3} & \text{f. } r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \dfrac{r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2}{r_3} & \text{f. } \quad " \quad < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nur Spezialfälle sind einfach; z.B. $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_1$, $r_3 = r_1 + r_2$

- skalare Multiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = (r, \varphi, z)$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda r, \varphi, \lambda \cdot z)$$

- Skalarprodukt: $\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ $\vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + z_1 z_2$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) + z_1 z_2$$

$$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 \cdot z_2$$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{r_1^2 + z_1^2}$$

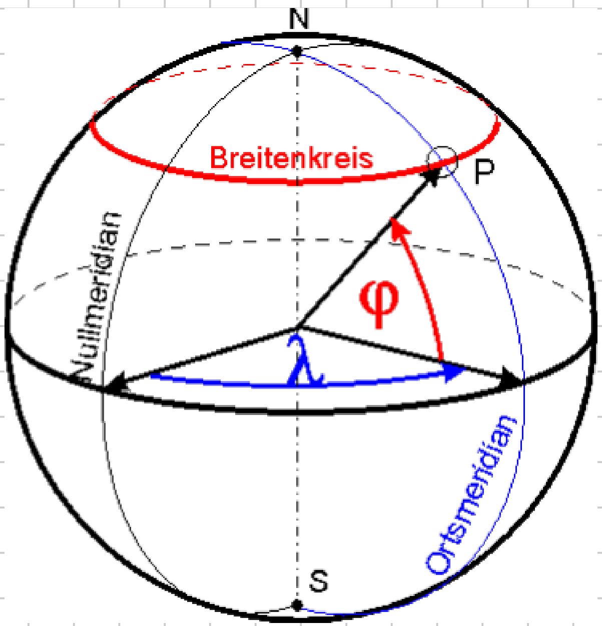
Winkel $\alpha$ zwischen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$

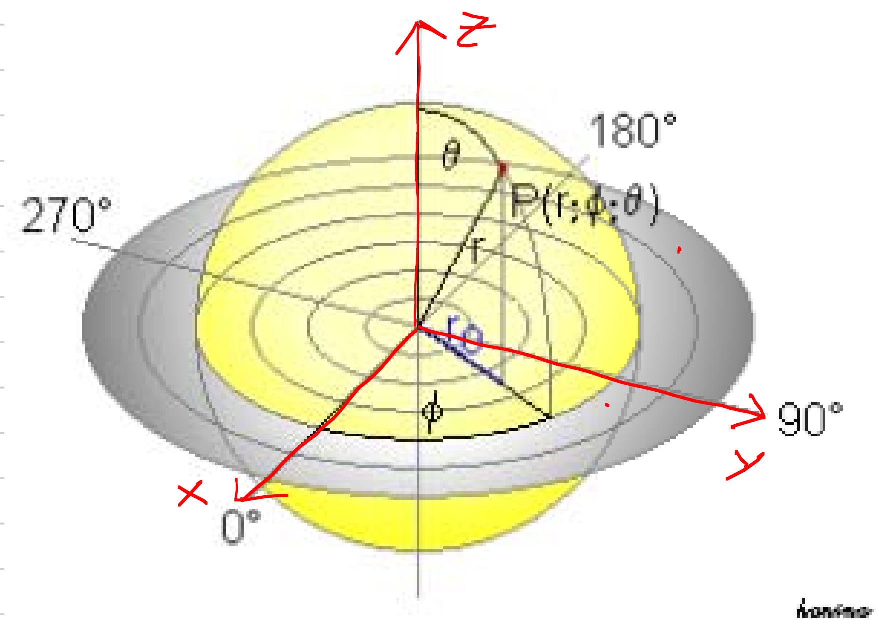
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{r_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{r_2^2 + z_2^2}} \Rightarrow \alpha \neq \varphi_2 - \varphi_1$$

(außer für $z = 0$)

Polarkoordinaten: (Kugelkoordinaten)

Erde: $(\lambda, \varphi, h = R - R_0)$ $\vec{a} = (r, \phi, \theta)$




üblich: $-180° \leq \lambda \leq 180°$

"östliche bzw. westliche Länge"

$-90° \leq \varphi \leq +90°$

"südliche bzw nördl. Breite"

$0 \leq \phi < 2\pi$ $0 \leq \theta \leq \pi$

$x = r \sin\theta \cos\phi$

$y = r \sin\theta \sin\phi$

$z = r \cos\theta$

Rücktransformation:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{f. } r > 0$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{f. } y < 0 \end{cases}$$

[für $r=0$ sind $\theta$ und $\phi$ beliebig;
für $x^2+y^2=0$ ($\hat{=}$ z-Achse) ist $\phi$ beliebig $\theta = \begin{cases} 0 & \text{f. } z > 0 \\ \pi & \text{f. } z < 0 \end{cases}$]

Skalarprodukt etc. berechnen $\longrightarrow$ mit kartesischen Koordinaten

Vorsicht: Winkel zwischen Vektoren sind i.a. nicht $\phi_2 - \phi_1$ oder $\theta_2 - \theta_1$, sondern müssen mit dem Skalarprodukt berechnet werden.