Mathematische Grundlagen

- Trigonometrische Funktionen (sin, cos, tan)
- Exponentialfunktion
- Potenzgesetze
- Logarithmengesetze
- Integrieren und Differenzieren
- Vektorrechnung
- Fehlerrechnung

1.1 Physikalische Größen und Einheiten

Präfixe
(mathematische Vorfaktoren)

Zenti:	c	10^{-2}
Dezi:	d	10^{-1}
Femto:	f	10^{-15}
Piko:	p	10^{-12}
Nano:	n	10^{-9}
Mikro:	µ	10^{-6}
Milli:	m	10^{-3}
Kilo:	k	10^{3}
Mega:	M	10^{6}
Giga:	G	10^{9}
Tera:	T	10^{12}

- **Sinnvolles Runden und Zahl der signifikanten Stellen**

1.1.5 Messfehler

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots x_n) / n$$

Mittelwert

$$\Delta x_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Empirische Standardabweichung

$$\Delta \bar{x} = \Delta x_e / \sqrt{n}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwerts

$$\Delta f_{\text{Gauß}}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

2.1.1 Kinematik in einer Dimension

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \tfrac{1}{2}at^2$$

***a*=const**

$$v(t) = v(0) + at$$

2.1.2 Kinematik in 2 und 3D: Kreisbewegung

gleichförmige Kreisbewegung

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi\,\nu}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu}}$$

$$\boxed{v = \omega r}$$

$$\boxed{a = \omega^2 r = v^2 / r}$$

2.2.1 Kräfte: Newtonsche Axiome

1. Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

Wenn auf einen Körper keine Kräfte einwirken, dann bleibt er im Zustand der gleichförmigen Bewegung (bzw. Ruhe).

2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

3. Newtonsches Axiom:

Reaktionsprinzip; „actio = reactio“

Wenn **zwei Körper** (1 und 2) miteinander wechselwirken,
dann besitzen die Kräfte, die die Körper aufeinander ausüben,
denselben Betrag und **entgegengesetzte Richtungen**.

$$\boxed{\vec{F}_{1\text{auf }2} = -\vec{F}_{2\text{auf }1}}$$

Kraft-Gegenkraft-Paar $\underline{F}_{1auf2}$, $\underline{F}_{2auf1}$

2.2.1 Kräfte

Gravitationsgesetz:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$$

Gewichtskraft

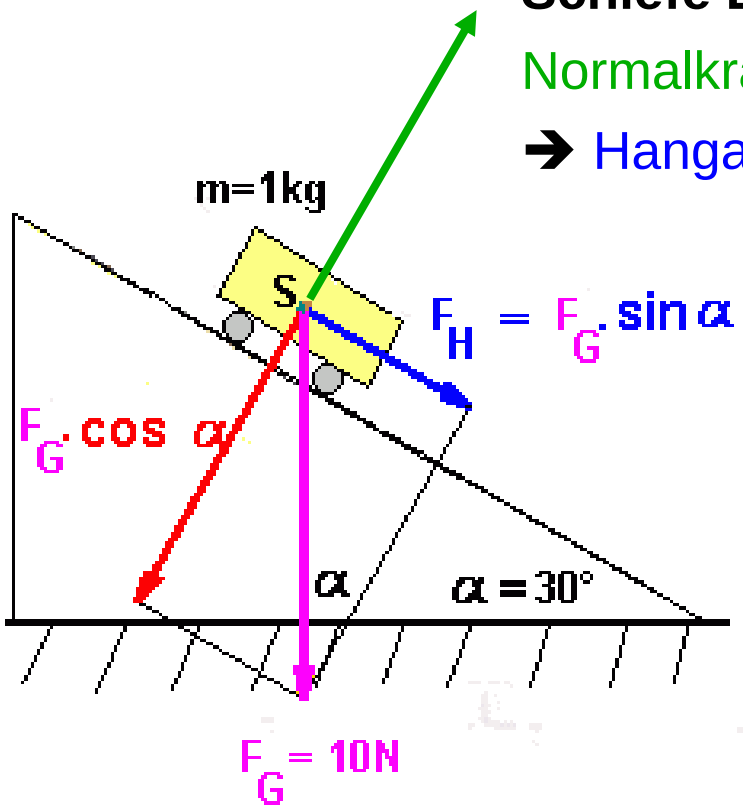
$$\boxed{F = g \cdot m}$$

g=9,81 m/s² ≈ 10 m/s²

Hookesches Gesetz:

$$\boxed{\vec{F} = -D \cdot \vec{x}}$$

2.2.1 Kräfte: Schiefe Ebene



Schiefe Ebene

Normalkraft ⊥ Oberfläche

➔ Hangabtriebskraft F_H || Oberfläche

2.2.1 Kräfte: Reibung

Haftreibung $|\underline{F}_{HR}^{max}| = \mu_{HR} \, |\underline{F}_N|$

Gleitreibung $|\underline{F}_{GR}| = \mu_{GR} \, |\underline{F}_N|$

2.2.1 Kräfte: Kreisbewegung

$|\underline{F}_z| = m\, a_z = m\, v^2 / R = m\, \omega^2\, R$

Zentripetalkraft

2.2.2 Impuls

Kraft	$\vec{F}(t) = m\vec{a}$	**Beschleunigung**
↕		↕
Impuls	$\vec{p}(t) = m\vec{v}$	**Geschwindigkeit**

$$\vec{p}_{Ges} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 + \ldots = \overrightarrow{const.}$$

Impulserhaltung:

2. Mechanik starrer Körper: 2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

$$\boxed{W = \int_1^2 \vec{F}(\vec{s})\, d\vec{s}}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

$$\boxed{E_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_{pot} = \tfrac{1}{2} D x^2}$$

2.2.3 Energieerhaltung

Energieerhaltungssatz:

Energie kann nur zwischen den verschiedenen Energieformen umgewandelt werden.

Sie kann weder aus dem Nichts erzeugt werden noch kann sie vernichtet werden.

Im abgeschlossenen System gilt:

- In der Mechanik (ohne Reibung): $E_{kin} + E_{pot} = const$

- Allgemein: $E_{kin} + E_{pot} + E_{elek} + E_{therm} + E_{chem} + \ldots = const$

Vorsicht in der Praxis:

Ist das System wirklich (so gut wie) abgeschlossen oder verliert es z.B. über Wärmestrahlung Energie nach draußen ?

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Leistung: $$P = \frac{dW}{dt}$$

2.2.4 Harmonische Schwingungen

$$a(t) = \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega \cdot t + \varphi) \\ \omega &= \sqrt{D/m} \end{aligned}}$$

(horizontales Federpendel)

$$x(t) = A\cos(\omega \cdot t) = A\sin(\omega \cdot t + \pi/2)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

(Fadenpendel)

2.2.4 Harmonische Schwingungen

Gedämpfte Schwingungen

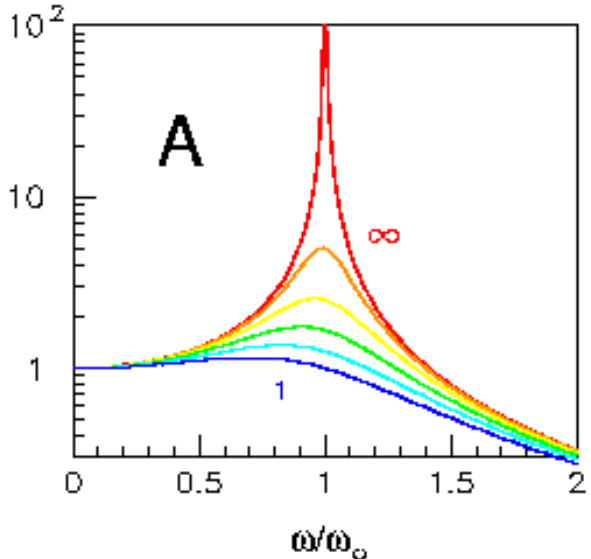
$$F(t) = m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t) - r \cdot \dot{x}(t)$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Erzwungene Schwingungen

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + D \cdot x = F_0 \cos(\omega_e \cdot t)$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi)$$



$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\delta^2 \omega_e^2}}$$

(diese Formel wird nicht vorausgesetzt)

2.2.5 Rotation

$$J = mr^2$$

$$J = \int r^2 dm$$

$$\vec{M} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Drehimpulserhaltung

Der (Gesamt-)Drehimpuls ist im abgeschlossenen System (keine äußeren Drehmomente) eine Erhaltungsgröße (analog zu Energie und Impuls).

Analogie: Translations- ⇔ Rotationsbewegung

Strecke	**s**	θ	Winkel
Geschw.	$\mathbf{v}=d\mathbf{s}/dt$	$\boldsymbol{\omega}=d\boldsymbol{\theta}/dt$	Winkelgeschw.
Beschleunigung	$\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$	$d\boldsymbol{\omega}/dt$	Winkel-Beschl.
Impuls	$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = J\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	Drehimpuls
träge Masse	m	$J=mr^2 = \int_{Vol.} r^2\rho dV$	Trägheits-moment
kinet. Energie	$\frac{1}{2}\, mv^2=p^2/(2m)$	$\frac{1}{2}\, J\, \omega^2=L^2/(2J)$	Rotations-energie
Kraft	$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt$	$\mathbf{M}= J\, d\boldsymbol{\omega}/dt = d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	Drehmoment

- Fett gedruckt sind vektorielle Größen, normal gedruckt sind skalare Größen, θ ist zB. die Länge von $\boldsymbol{\theta}$!
- $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\theta}$ und **L** sind axiale Vektoren
- $\boldsymbol{\theta}$ entspricht der Drehung um den Winkel θ um die Achse parallel zu $\boldsymbol{\theta}$

3.1 Festkörper: Zusammenfassung

- (Massen-)Dichte $\rho = m / V$ [Masse pro Volumen; Einheit: 1 kg/m3]

- Spannung (Druck p) $\sigma = F / A$ [Kraft pro Fläche; Einheit: 1 N/m2 = 1 Pa (Pascal)]

- Verformung von Festkörpern durch Kräfte

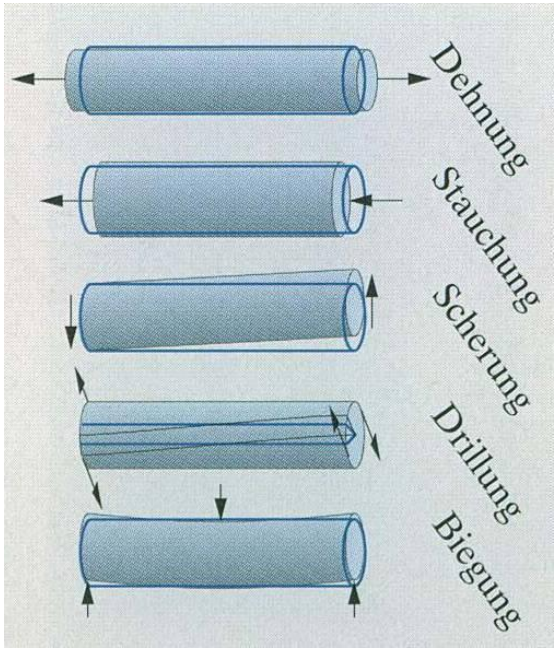
1) Formänderung <u>mit</u> Volumenänderung:
Dehnung/Stauchung, Kompression

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K} = -\kappa p$$

2) Formänderung <u>ohne</u> Volumenänderung:
Scherung (Torsion, Biegung)

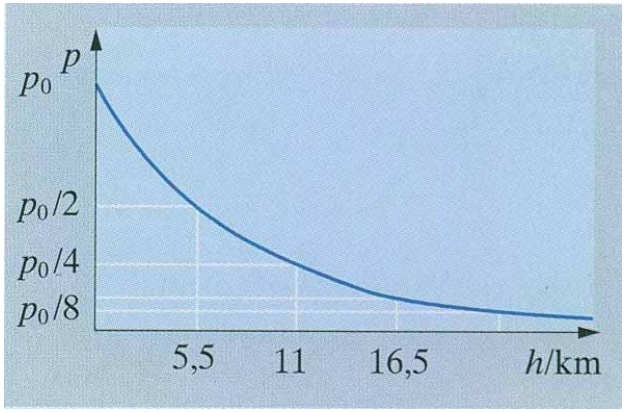
$$\alpha = \frac{F}{G \cdot A} = \frac{\tau}{G}$$



3.2 Hydrostatik

$$p(h) = \frac{F_g(h)}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

Schweredruck (hydrostatischer Druck)



$$p(h') = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h'}$$

Barometrische Höhenformel

(Formel wird nicht vorausgesetzt)

$$W = \int F(s)ds = \int pA \cdot ds = \int p \cdot dV$$

Volumenarbeit

Prinzip von Archimedes

$F_{Auf} = \rho_{fl}\, g\, V = m_{fl}\, g$

Auftriebskraft = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

$$\boxed{\varepsilon = \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}}$$

spezifische Oberflächenenergie ε bzw. Oberflächenspannung σ

3.3 Hydrodynamik

$$\boxed{p + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}}$$

Bernoulli-Gleichung für ideale Flüssigkeiten bei stationärer Strömung:

$$\boxed{F_z(x) = \eta A \frac{dv_z}{dx}}$$

Viskosität η

4.1 Temperatur

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$ Thermische Ausdehnung

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T$$

$$\boxed{c = \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T}}$$ Spezifische Wärmekapazität

$$\boxed{c_{molar} = \frac{\Delta Q}{n\,\Delta T}}$$ Molare Wärmekapazität

$$\boxed{j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}}$$ **Wärmeleitungsgleichung:**

4.3 Hauptsätze der Thermodynamik

1. Hauptsatz (Energieerhaltung)
Wärme ΔQ und **Arbeit ΔW** sind **wegabhängig;**
die Energie(-änderung) ΔU hängt dagegen nur von **Anfangs- und Endzustand** des Prozesses ab.

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

ΔQ: von außen zugeführte Wärme
ΔW: vom System geleistete Arbeit

2. Hauptsatz
Für ein abgeschlossenes System
nimmt die Entropie S bei irreversiblen Prozessen zu
(niemals ab) und bleibt für **reversible Prozesse konstant.**
oder:
Es gibt irreversible Prozesse.

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

4.4 Ideales Gas

$$\boxed{p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T}$$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Gleichverteilungssatz:

Jeder Freiheitsgrad speichert <u>im Mittel</u> die Energie ½ $\mathbf{k_B T}$

z. B f=3 $U = \frac{3}{2} N \cdot k_B T$

$$\boxed{j_C = -D \frac{dc}{dx}}$$

Diffusionsgesetz

(1. Ficksches Gesetz)

5.1 Grundbegriffe: Ladung, Coulomb-Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Coulomb-Kraft
(r: Abstand)

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

Coulomb-Kraft in vektorieller Form

$$U_{ab} = \frac{W}{q_1} = \frac{1}{q_1} \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (-\vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

Elektrische Spannung U (= Potentialdifferenz)

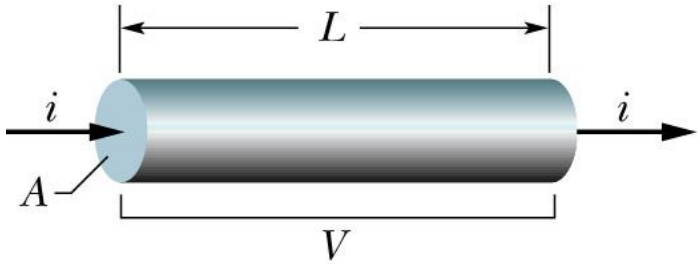
5.1 Grundbegriffe: Strom

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$U = R \cdot I$$

Ohmsches Gesetz

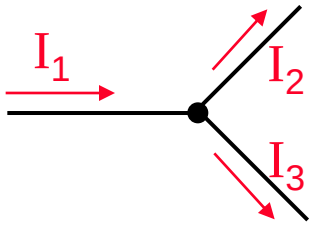
$$R = \rho \frac{L}{A}$$



$$P = U \cdot I$$

5.2 Elektrische Netzwerke

Kirchhoffsche Regeln

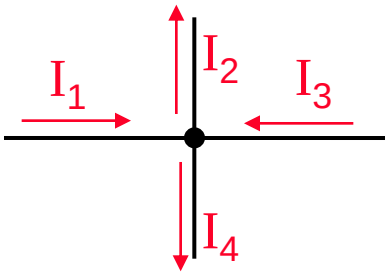


$$\sum_j I_j = 0$$

zum Knoten: **+**
vom Knoten: **-**

Knotenregel:

Die Summe aller Ströme, die zu einem Knoten hin fließen, ist gleich der Summe der Ströme, die von diesem Knoten weg fließen.

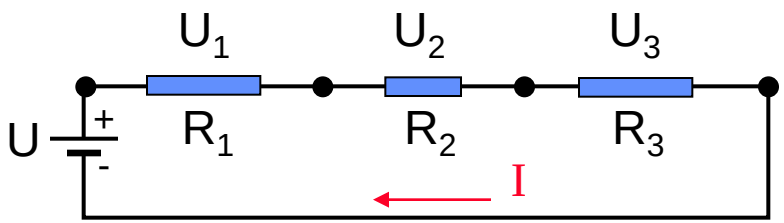


$$\sum_{\text{Masche}} U_j = 0$$

Maschenregel:

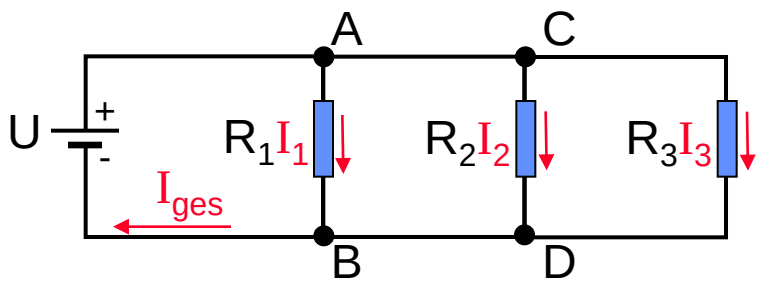
Beim Durchlaufen einer Masche (d.h. einer geschlossene Schleife) ist die Summe aller Spannungen gleich Null.

5.2 Elektrische Netzwerke



Reihenschaltung

$$R_{ges} = \sum_j R_j$$



Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_j \frac{1}{R_j}$$

5.3 Elektrisches Feld: Punktladung

Richtung von E(r):

von + nach -

$$\vec{F} = q_1 \cdot \vec{E}$$

Vorzeichen von q_1 beachten !

Bsp.: **E-Feld einer Punktladung q_0 bei r_0**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right|}$$

Für r_0=0 (Ursprung):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{\left|\vec{r}\right|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$$

5.3 Elektrisches Feld: Dipol

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \vec{d} = q \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}$$ **Dipolmoment**

5.3 Elektrisches Feld: Potential

$$\Rightarrow U_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Elektrische Spannung U_{ab}

$$\varphi(\vec{r}_b) = \int_{\infty}^{\vec{r}_b} -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Potential φ

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -grad\left(\varphi(\vec{r})\right)}$$

5.3 Elektrisches Feld: Satz von Gauß

Satz von Gauß

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Der **Fluss** durch eine **geschlossene Fläche A** ist proportional zur von der Fläche **eingeschlossenen Ladung**.

5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

$$\boxed{C = q / U}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$\boxed{C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

$$\boxed{U_C(t) = U_0 \exp(-t / RC)}$$

Entladen eines Kondensators

$$\boxed{U_C(t) = U_0 \left\{1 - \exp(-t / RC)\right\}}$$

Laden eines Kondensators

5.3 Elektrisches Feld: Kondensator

$$\boxed{\Rightarrow C_{ges} = \sum_j C_j}$$

Parallelschaltung von Kondensatoren

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{C_{ges}} = \sum_j \frac{1}{C_j}}$$

Reihenschaltung von Kondensatoren

5.4 Magnetfeld: Lorentz-Kraft

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

Definition des Magnetfeldes (B-Feld)

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I}$$

Berechnung des B-Feldes: Amperesches Gesetz

$$\boxed{\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}}$$

B-Feld langer, gerader Draht

5.4 Magnetfeld: Magnet. Dipol im B-Feld

Drehmoment auf magnet. Dipol

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

5.4 Magnetfeld: Induktion

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faradaysches Induktionsgesetz

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Änderung der Menge an B-Feld:

5.5 Wechselstrom

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Wechselspannung

$$\Rightarrow \frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{eff}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

LC-Schwingkreis

6.1 Wellen

$$y(x,t) = y_{max}\,\sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Form der Welle (Ko-)Sinus als Funktion von **Zeit und Ort**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\nu = \omega / 2\pi$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

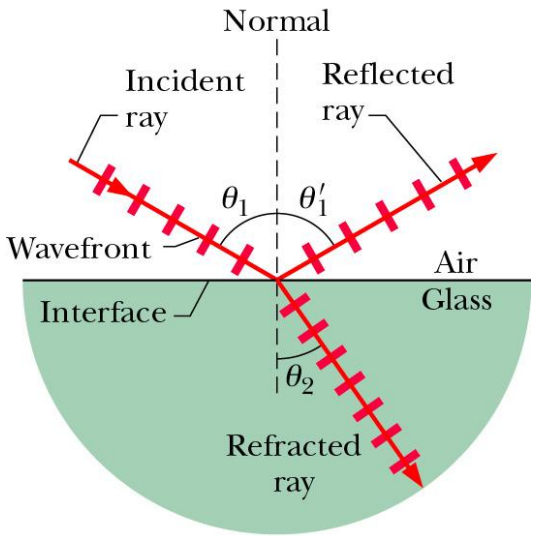
6.1 Elektromagnetische Wellen

$$\theta_1 = \theta_1'$$

Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel
(gemessen zur Normalen)

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2$$

Brechung



6.2 Abbildungen

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$