3.2 Hydrostatik: Zusammenfassung

- Druck ist allseitig, keine Vektorgröße.
- Schweredruck in inkompressibler Flüssigkeit: $p(h) = \rho g h$

im idealen Gas: $$p(h') = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h'}$$

- Volumenarbeit: $W = p\,\Delta V$
- Stempeldruck / Hydraulik: $F_1 / F_2 = A_1 / A_2$
- Auftrieb = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit: $F_{Auf} = \rho_{fl}\, g\, V_{Körper} = m_{fl}\, g$

Oberflächen / Grenzflächen:

- Oberflächenspannung (spez. Oberflächenenergie): $\boldsymbol{\sigma = \Delta E / \Delta A}$
- $\sigma > 0$ ➔ Oberfläche will minimal werden
- Steighöhe in Kapillare (3 versch. Oberflächen): $\boldsymbol{h = 2\sigma \cos(\theta) / (r\, \rho\, g)}$
- Im Gleichgewicht steht die Gesamtkraft senkrecht auf Fl.-Oberfläche

3.3 Hydrodynamik

Hydrodynamik: Lehre von strömenden Flüssigkeiten (+ darin umströmten Körpern)

Aerodynamik: Lehre von strömenden Gasen (+ darin umströmten Körpern)

Keine Bahnberechnung von einzelnen Teilchen, sondern Beobachtung der vorbeiströmenden Fluidpakete am Ort (x,y,z) in Abhängigkeit von der Zeit t.

Betrachte ideale Flüssigkeit:

- inkompressibel (Dichte ρ (fast) unabhängig vom Druck)
- nicht-viskos (keine innere Reibung zw. den Flüssigkeitsteilchen,
  nur äußere Reibung an der Wand des Behälters (für nicht-benetzend))

Strömungsformen:

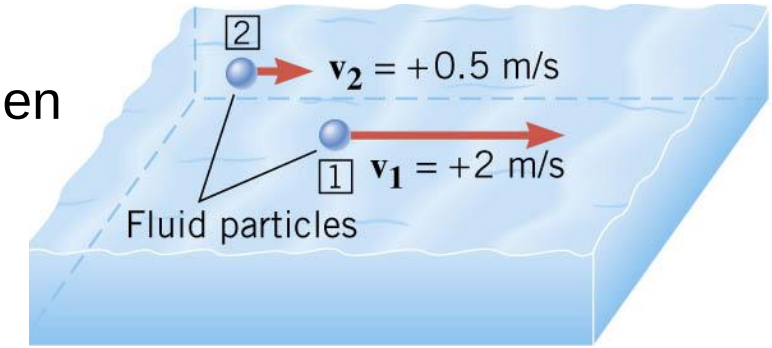
- stationär / nichtstationär
- laminar (Strömung in nicht-mischenden Schichten) / turbulent (mit Wirbeln)

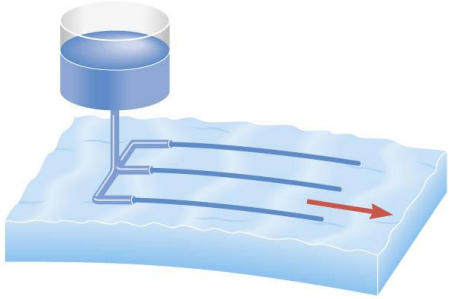
3.3 Hydrodynamik

Stationäre Strömung

Geschwindigkeit eines vorbeiströmenden Teilchens hängt nur vom Ort ab, nicht aber von der Zeit: $\underline{v} = \underline{v}\,(x,y,z)$

(Betrag & Richtung erhalten)



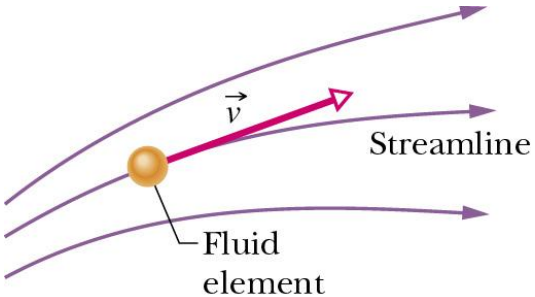


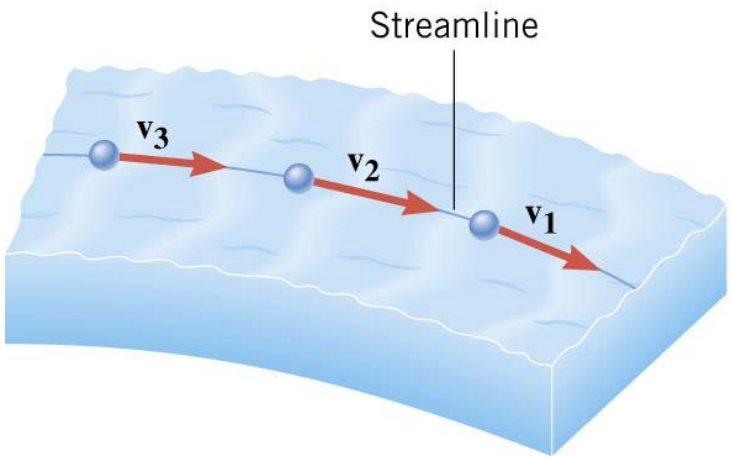
(a)

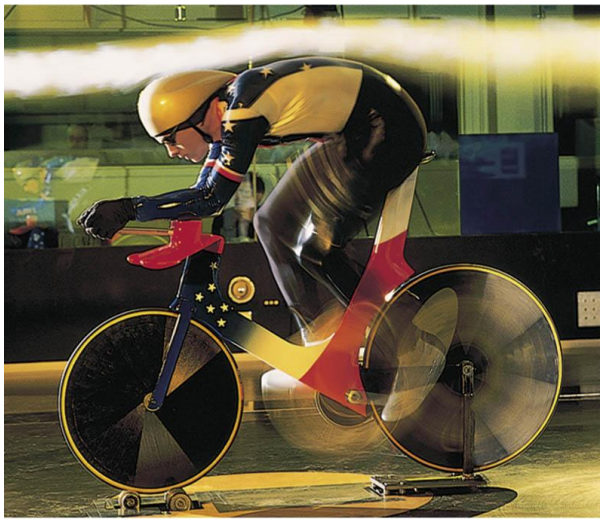
Visualisierung durch **Stromlinien**:

Tangente an Stromlinie gibt die örtliche Geschwindigkeit an.

Stromlinien können sich nicht schneiden.





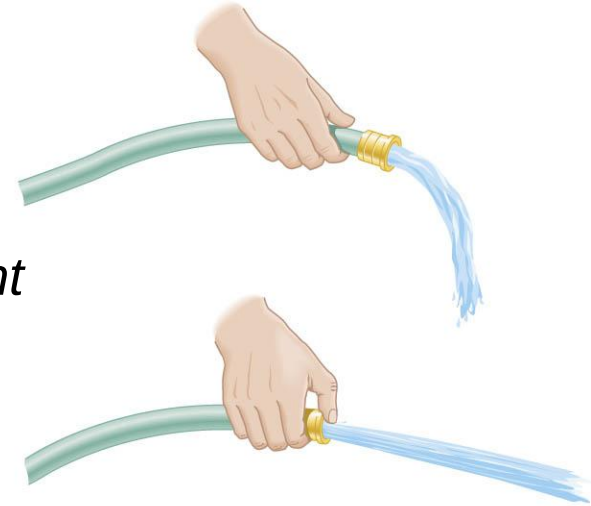


3.3 Hydrodynamik

Kontinuitätsgleichung

Frage: Warum ändert sich die Ausströmgeschwindigkeit, wenn die Öffnung verkleinert wird?

Antwort: weil kein Wasser entweichen kann oder hinzukommt (d.h. die Massenstromstärke $\Delta m/\Delta t$ ist konstant)



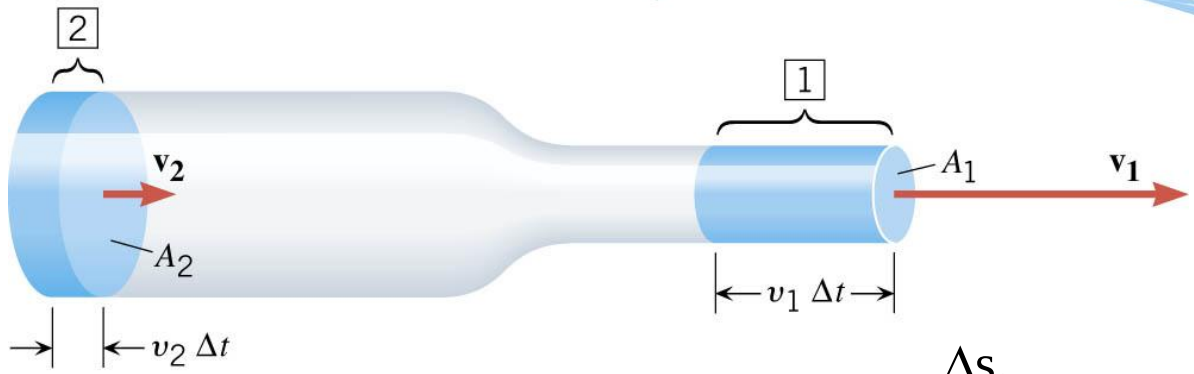
Massenstromstärke $I_m = \Delta m/\Delta t$

(Rate des Massenflusses durch Querschnittsfläche A_i):

$$I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{const} = \rho_1 \cdot V_1 / \Delta t$$

$$= \rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2$$

Kontinuitätsgleichung



$$A_1 \cdot v_1 = A_1 \frac{\Delta s_1}{\Delta t} = V_1 / \Delta t$$

Für inkompressible Flüssigkeiten (ρ=const):

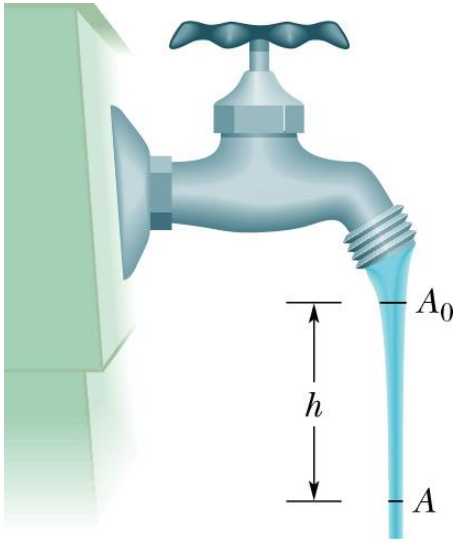
$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const}}$$

oder: Volumenstromstärke I_V bleibt konstant

$$\boxed{I_V = V_1 / \Delta t = V_2 / \Delta t = \text{const}}$$

3.3 Hydrodynamik

Anwendung der Kontinuitätsgleichung



$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const} = \Delta V / \Delta t = I_V}$$

Frage:

Warum schnürt sich der Wasserstrahl zusammen?

Antwort:

Der Strahl wird durch die Schwerkraft beschleunigt.

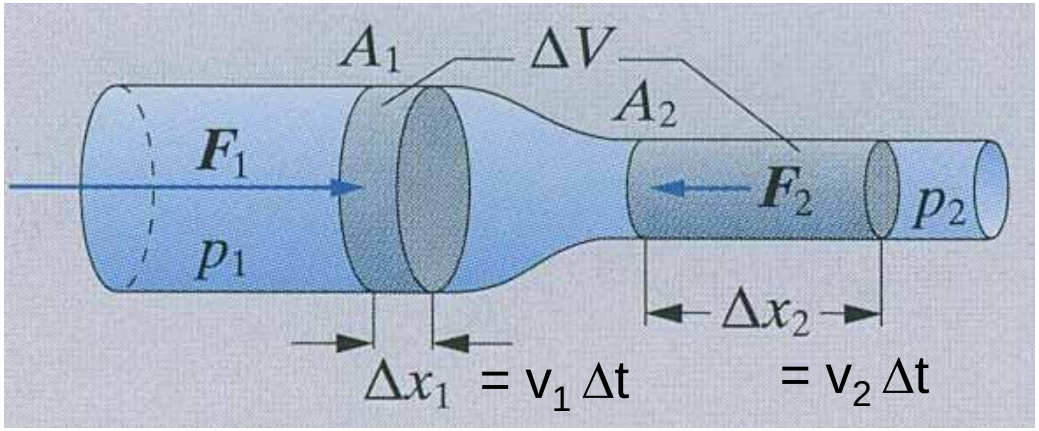
Da die Flussrate bei jedem Querschnitt gleich sein muss,

nimmt der Querschnitt nach unten hin ab.

3.3 Hydrodynamik

Bernoulli-Gleichung für ideale Flüssigkeiten bei stationärer Strömung:

(zunächst für ein horizontales Rohr)



$A_1 v_1 = A_2 v_2$ ➔ $v_2 > v_1$

➔ zwischen A_1 und A_2 wird die Flüssigkeit **beschleunigt**

➔ kinetische Energie aus Volumenarbeit

➔ **$p_1 > p_2$** (die Druckdifferenz beschleunigt die Flüssigkeit !)

eigentlich nur eine andere Formulierung der **Energieerhaltung** (der Mechanik) :

Volumenarbeit + kinetische Energie = const $\Rightarrow pV + \frac{1}{2} m v^2 = \text{const}$

➔ Summe aus statischem Druck p und **Staudruck ½ ρ v²** ist überall konstant:

$$\boxed{p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{const}}$$

Durch die Volumenarbeit W wird die kinetische Energie von ΔV um ΔE_{kin} erhöht.

➔ $W = (p_1 - p_2)\,\Delta V \quad = \quad \Delta E_{kin} = ½\,\rho\,\Delta V\,(v_2^2 - v_1^2)$

(ΔV wird durch F_1 beschleunigt & durch F_2 abgebremst)

3.3 Hydrodynamik

Bernoulli-Gleichung für ideale Flüssigkeiten bei stationärer Strömung:

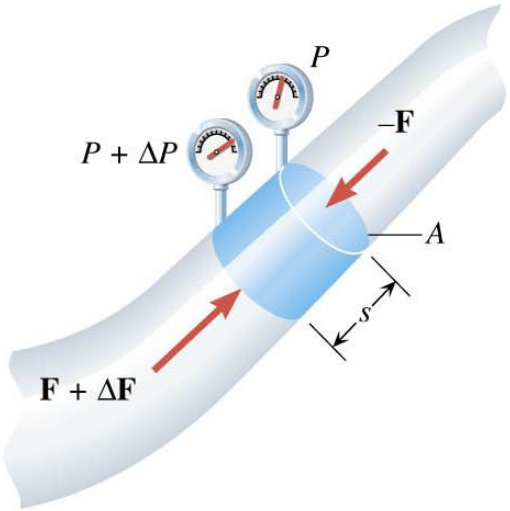
jetzt auch Betrachtung der **potentiellen Energie** $E_{pot} = mgh$:

$$pV + mgh + \tfrac{1}{2} m v^2 = \text{const}$$

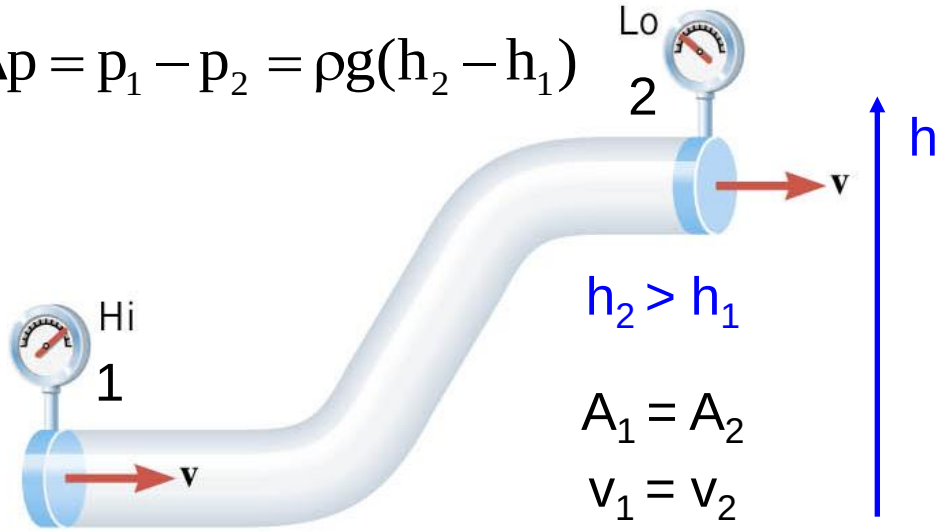
bzw.: $pdV + \rho ghdV + ½ \rho v^2 dV = const$

$$\boxed{p_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2}$$

Volumenarbeit ➔ potentielle Energie



$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$



$h_2 > h_1$

$A_1 = A_2$

$v_1 = v_2$

Im höher liegenden Gebiet ist der statische Druck p kleiner

3.3 Hydrodynamik

Bernoulli-Gleichung für ideale Flüssigkeiten bei stationärer Strömung:

$$\boxed{p + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}}$$

Vorsicht: h wächst nach oben, d.h. ρgh ist <u>nicht</u> der Schweredruck

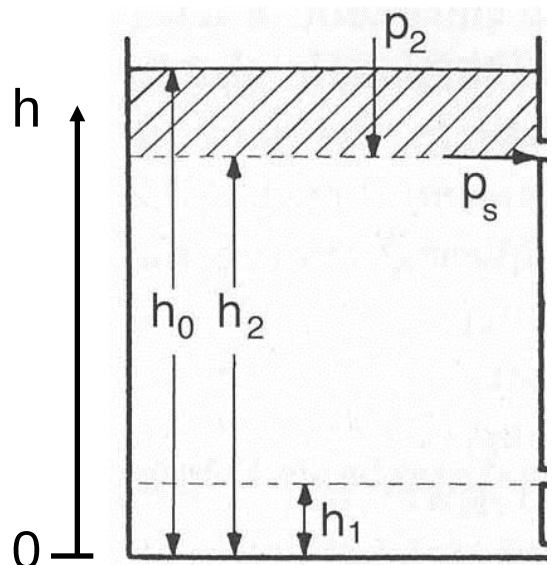
Erinnerung
Schweredruck:

$$p = \rho \cdot g \cdot (h_0 - h)$$

Bernoulli für v=0:

$$p + \rho g h = \text{const}$$

✓

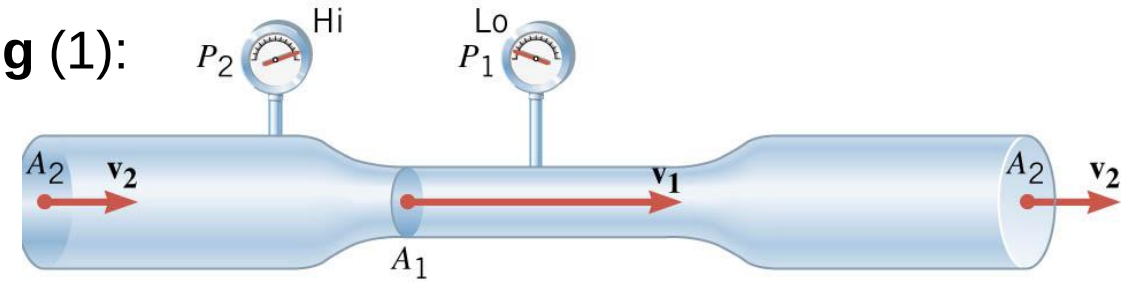


3.3 Hydrodynamik

Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (1):

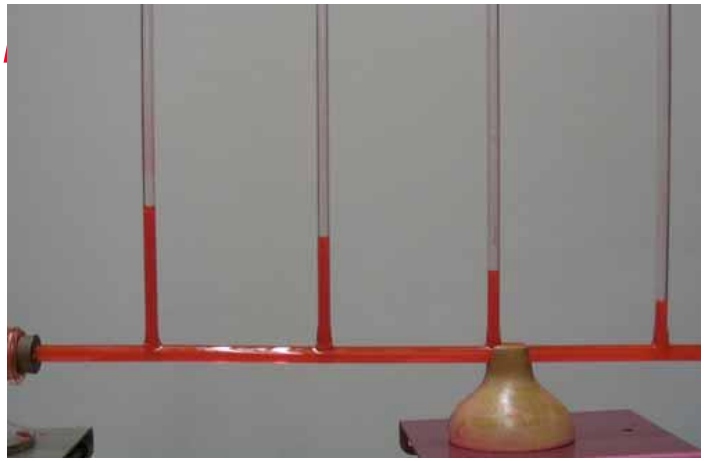
Staudruck

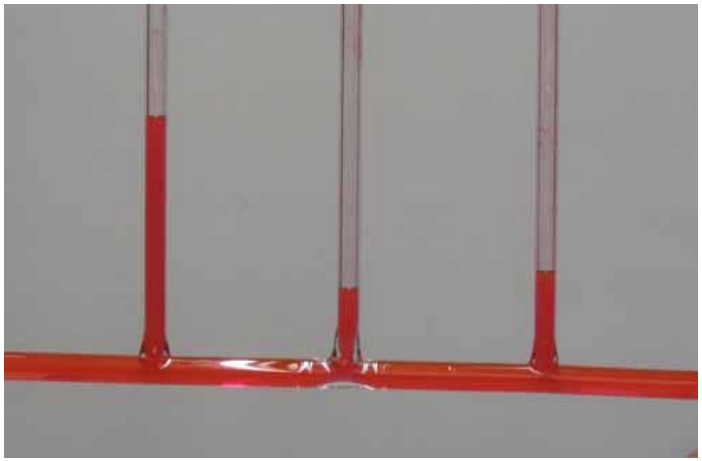
hydrodynamisches Paradoxon



$$p_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{const}$$

In Gebieten mit größerer Geschwindigkeit ist der statische Druck p kleiner





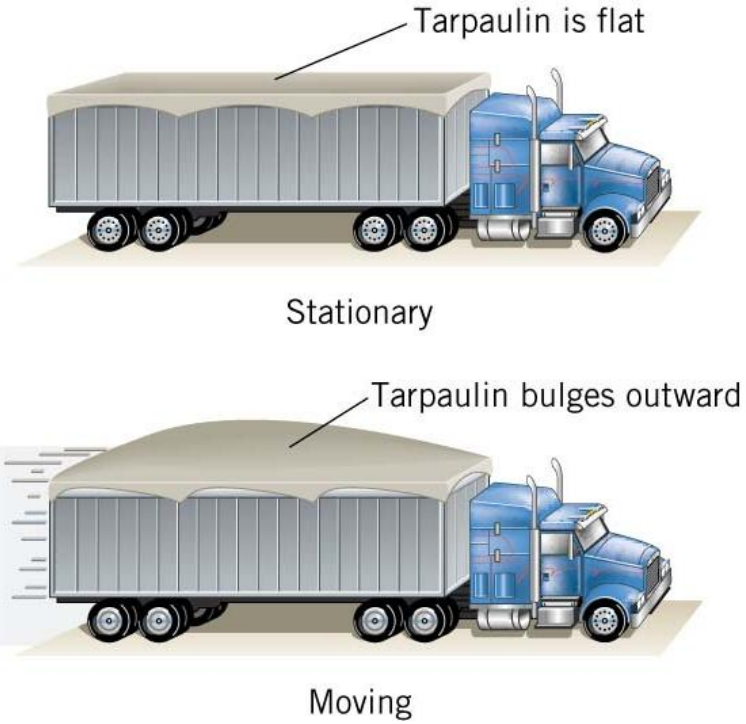
Bisher Reibung in Energiebilanz vernachlässigt.

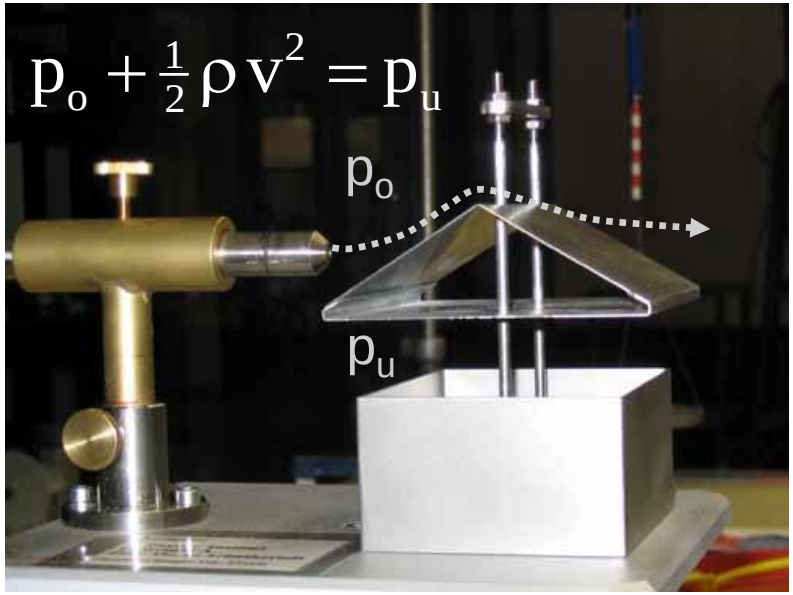
Bei stationärer Strömung und konstantem Querschnitt nimmt der Druck entlang des Rohres wegen Reibung ab (s. später).

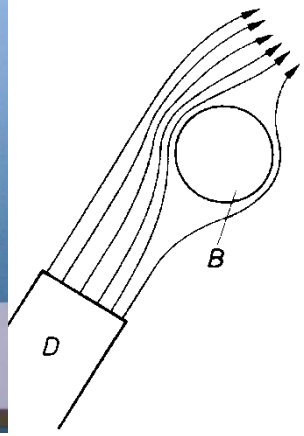
An der Engstelle ist der Druck am geringsten !

3.3 Hydrodynamik

Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (2):







Luft auf Außenseite (bzw. Oberseite) strömt schneller

➔ *statischer Druck außen (oben) ist geringer (Unterdruck)*

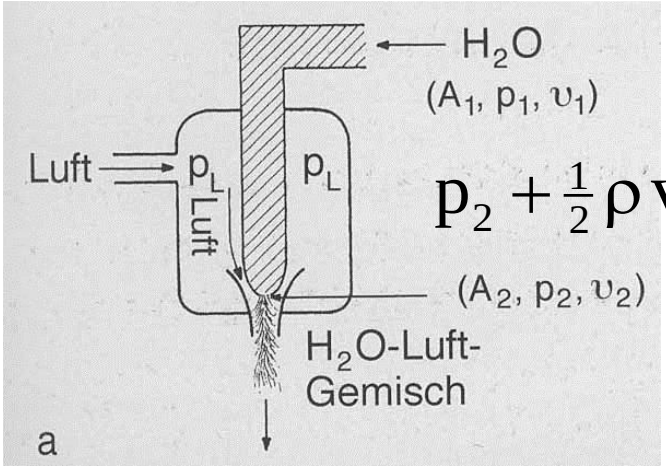
➔ *Plane (bzw. Dach, Ball) wird hochgezogen.*

Flugzeug-Tragfläche: dynamischer Auftrieb, Wirbelbildung wichtig

3.3 Hydrodynamik

Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (3):

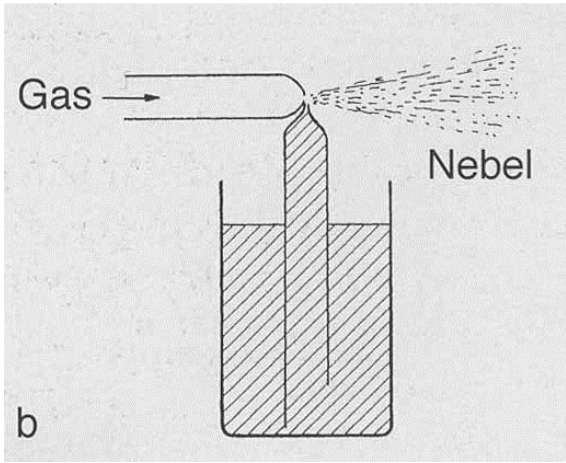
Wasserstrahlpumpe



$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_L$$

Wasser fließt durch die kleine Fläche A_2
➔ *Geschwindigkeit v_2 sehr groß*
➔ *statischer Druck p_2 klein*
➔ *Luft wird angesaugt und mitgerissen*
Vakuum bis p_L > 2 kPa (15 mm Hg)

Zerstäuber



Gas strömt durch die kleine Fläche A_2
➔ *Geschwindigkeit v_2 sehr groß*
➔ *statischer Druck p_2 klein*
➔ *Wasser wird angesaugt und versprüht*

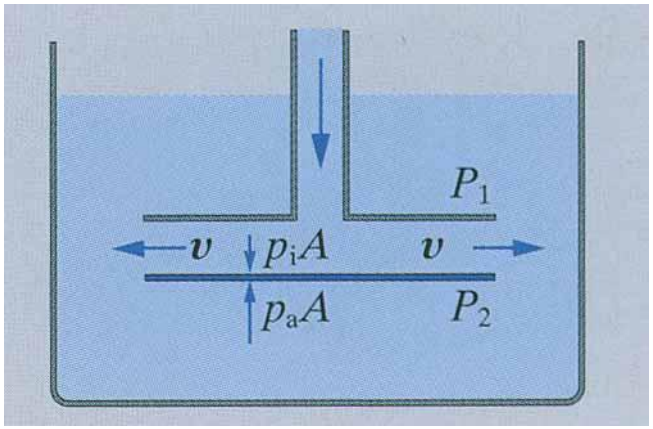
3.3 Hydrodynamik

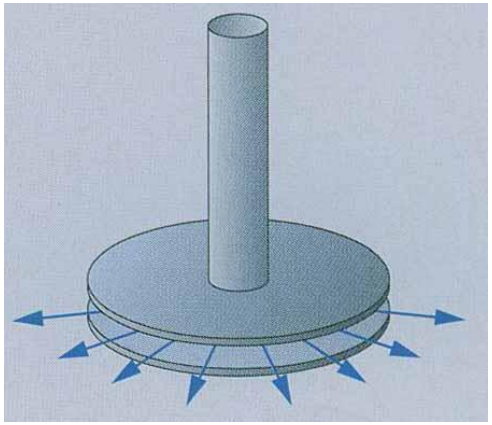
Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (4):

Hydrodynamisches Paradoxon

$$p_i + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a$$

$$p_i < p_a$$





Ein Fluid strömt von oben ein.
Die untere Platte wird von der
Druckdifferenz p_a-p_i
***nach oben gezogen** !*

3.3 Hydrodynamik

Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (5):

Magnus-Effekt (oder Venturi-Effekt)

Objekt **rotiert** im Luftstrom,

durch Reibung führt der Ball die Luft mit

➔ Strömungsgeschwindigkeit an den Seiten unterschiedlich

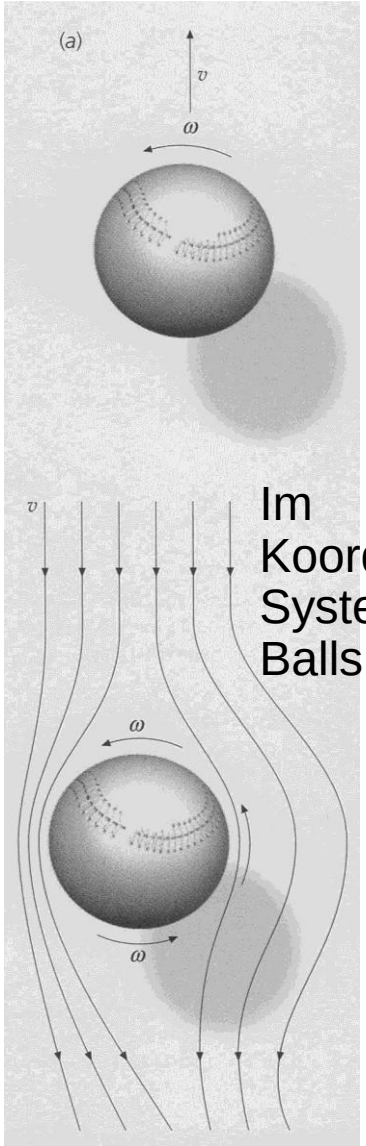
➔ Druck unterschiedlich

➔ **Kraft senkrecht zur Windrichtung**

Anwendung: Sport (Top-Spin, Bananenflanke)

Film Roberto Carlos:
http://www.youtube.com/watch?v=3ECoR__tJNQ

http://www.youtube.com/watch?v=KwHBp3yqnLQ



Ball im Labor-system

Im Koordinaten-System des Balls

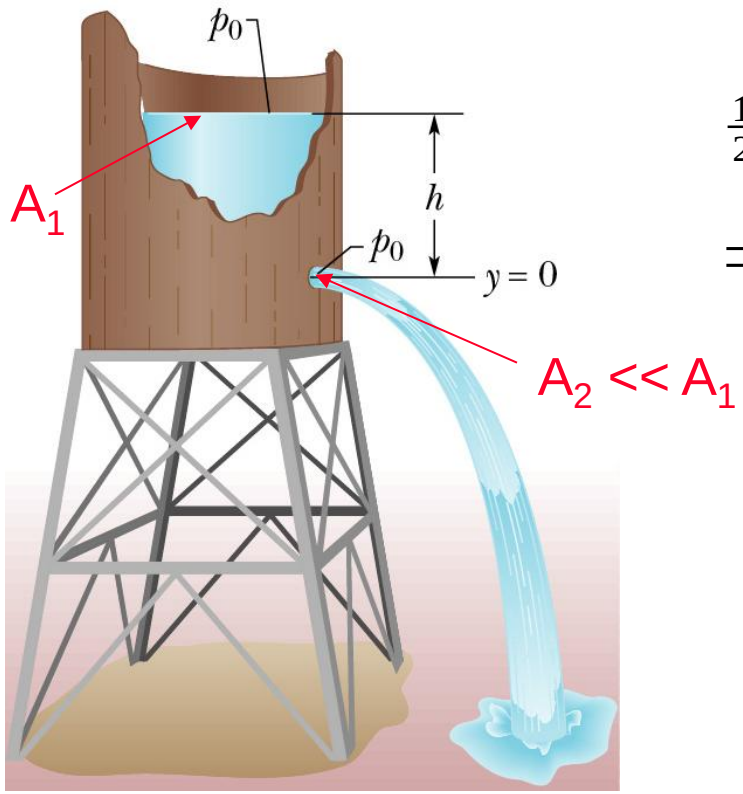
v groß
p klein

v klein
p groß

3.3 Hydrodynamik

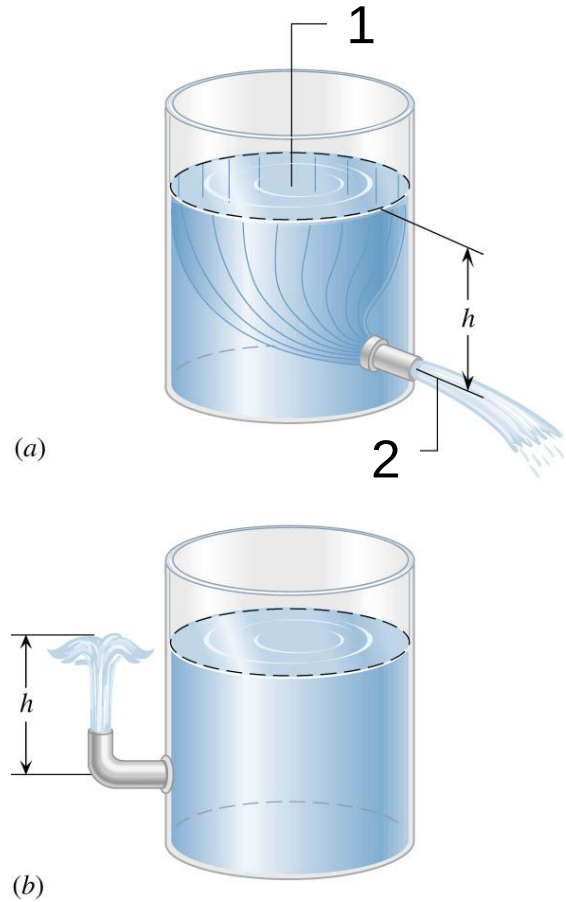
Anwendung der **Bernoulli-Gleichung** (6):

Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit



$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh$$

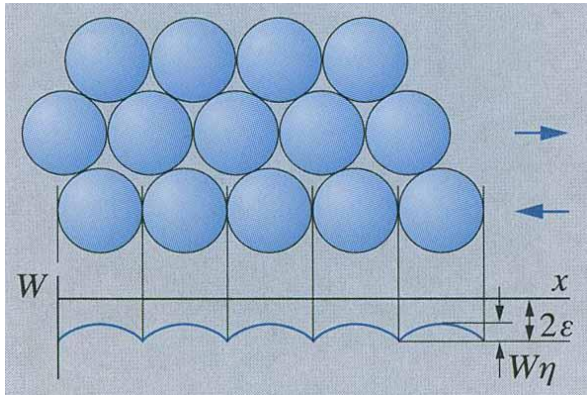
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



3.3 Hydrodynamik

Viskosität η

- eine viskose Flüssigkeit fließt nur sehr **zäh** (z.B. Honig)
- Viskosität entspricht der **Reibung** in der Punktmechanik, d.h. Umwandlung von Bewegungsenergie in Wärme
- hier: innere Reibung zwischen benachbarten Flüssigkeitsschichten aufgrund von Kohäsion. Im Detail sind die Reibungsprozesse komplex, die Viskosität liefert eine **effektive Beschreibung**.



- jede **reale Flüssigkeit ist viskos**, aber η ist extrem **temperaturabhängig** (z.B. Motoröl im Winter) und variiert von Flüssigkeit zu Flüssigkeit in weiten Grenzen

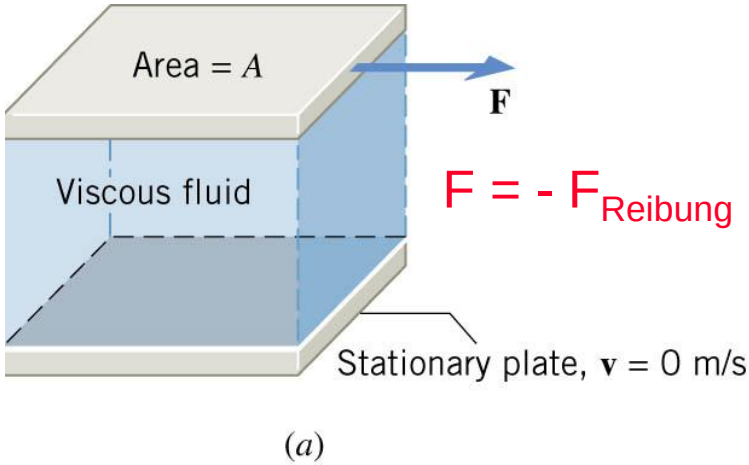
3.3 Hydrodynamik

Viskosität η

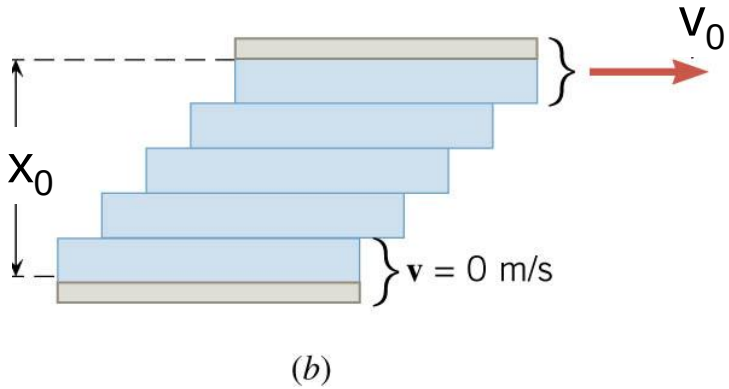
$$F = \eta A \frac{v_0}{x_0}$$

Einheit η:

1 Pa s = 1 Ns / m²



F ist die nötige tangentiale Kraft, um eine ebene Platte der Fläche A mit konstanter Geschwindigkeit v_0 parallel zu einer unbeweglichen Grenzfläche (im Abstand x_0) zu bewegen.



anschaulich: $F \propto A$, $F \propto v_0$ (Reibung $\propto$ v)

Für kleineres x_0 ist die Geschwindigkeitsdifferenz zw. benachbarten Schichten und damit auch die Reibungskraft größer ➔ $F \propto 1/x_0$

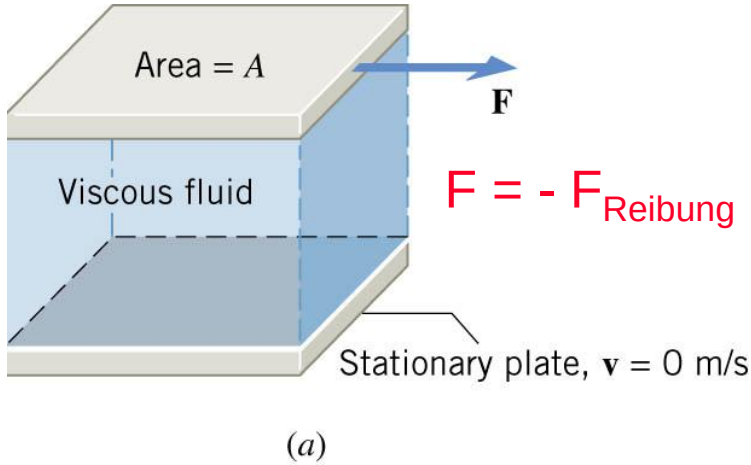
Die Flüssigkeit benetzt die Platte und die Grenzfläche, d.h. die Flüssigkeit haftet fest an beiden (v = 0 bzw. v = v_0 am Rand) ➔ nur innere Reibung.

Wird die Platte nicht benetzt ➔ auch äußere Reibung zw. Flüssigkeit und Wand muss betrachtet werden.

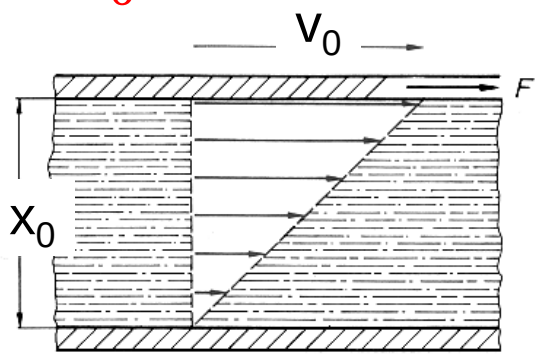
3.3 Hydrodynamik

Viskosität η

$$F = \eta A \frac{v_0}{x_0}$$

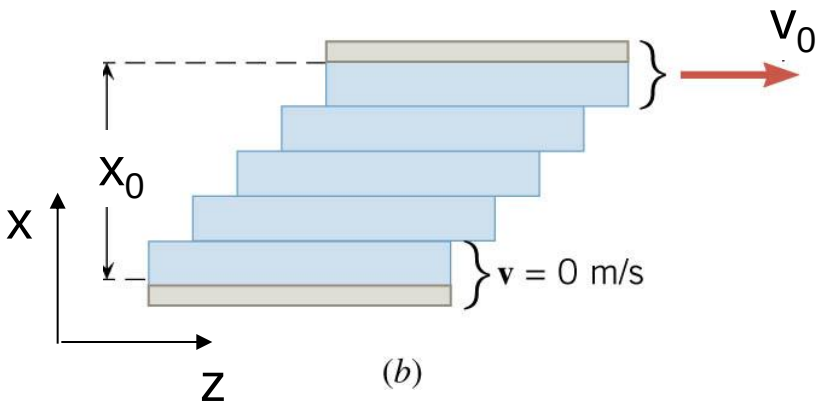


$F = -F_{Reibung}$



hier: konstantes Geschwindigkeitsgefälle

$dv_z/dx = v_0/x_0$



allgemein für beliebiges Geschwindigkeitsprofil:

$$F_z(x) = \eta A \frac{dv_z}{dx}$$

(*F ∝ Änderung von v zw. benachbarten Schichten*)

A=100cm²; v_z=1m/s ; x_0=1μm
➔ F=10N in Wasser

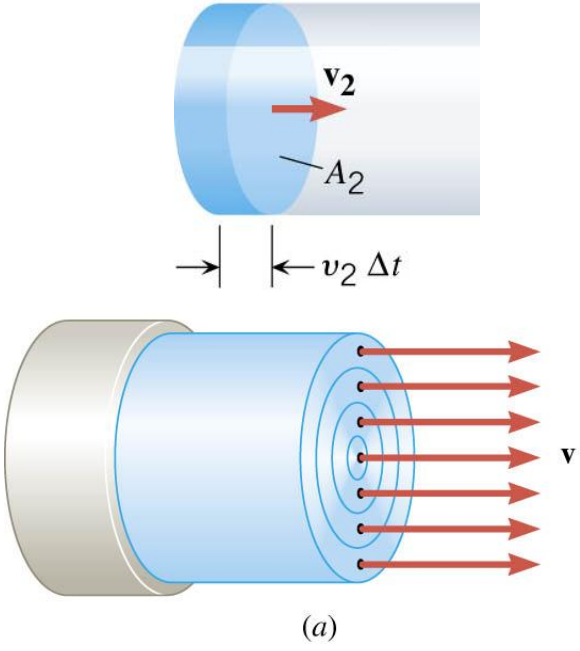
Bei 20°C:

Wasser: η = 0.001 Pa s Blut: ~ 0.004 - 0.005 Pa s Öle: 1 Pa s

3.3 Hydrodynamik

Frage: Wie groß ist die **Volumenstromstärke** $I_V = dV/dt$?

(Welches Volumen strömt pro Sekunde durch die Querschnittsfläche A ?)



a) **ohne Viskosität** („Reibung“):

v_0 = const über die Fläche A

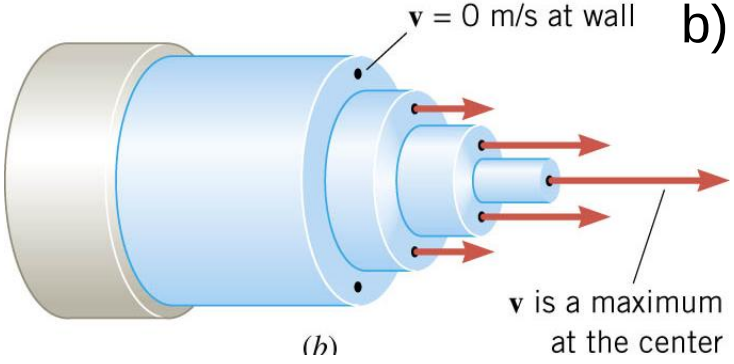
$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v_0$$

$$= \pi R_0^2 \cdot v_0$$

oder durch Aufsummieren der Beiträge der einzelnen Ringe (Schichten) mit Fläche $dA_{Schicht} = 2\pi r_{Schicht} \cdot dr$

$$I_V = \sum_{alle} dA_{Schicht} \cdot v_{Schicht} = \int v_0 \cdot dA_{Schicht} = \int_0^{R_0} v_0 \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\Rightarrow I_V = v_0 \cdot \pi R_0^2$$



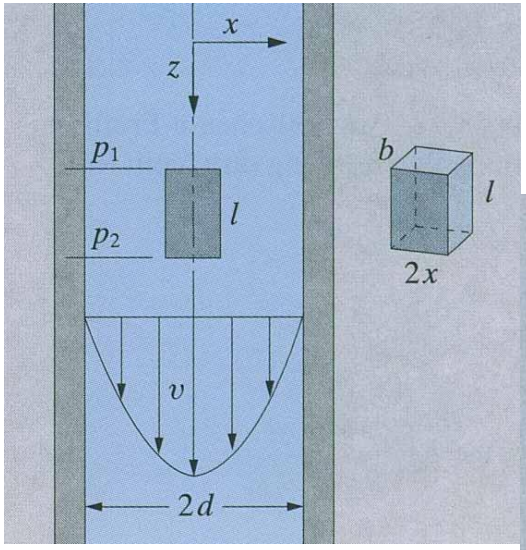
b) **mit Viskosität ➔ v = v(r):**

$$I_V = \int_0^{R_0} v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Geschwindigkeitsprofil v(r):
äußerste Schicht haftet an Wand,
innerste bewegt sich am schnellsten

3.3 Hydrodynamik

Beispiel für Strömungsprofile



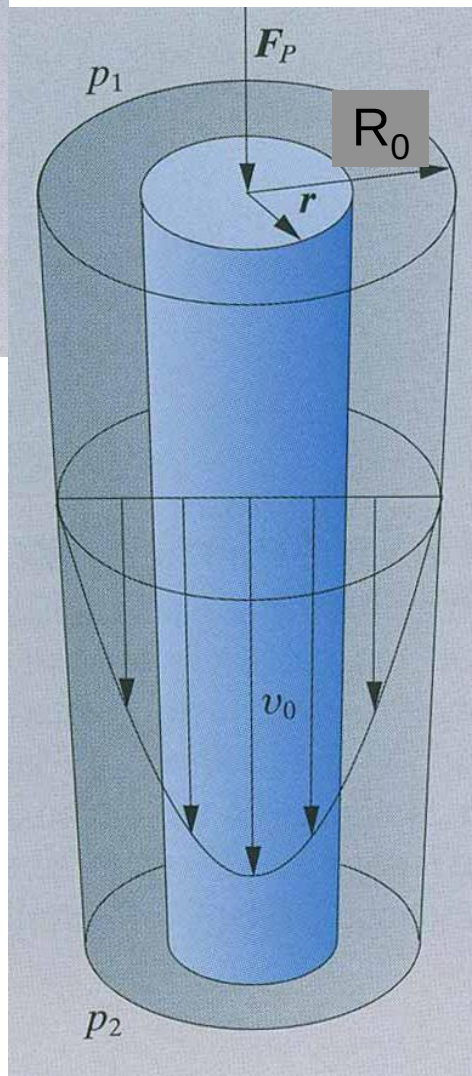
1) Laminare Strömung im **Spalt** (Breite 2d)

Die Flüssigkeit haftet am Rand (v=0)

und fließt in der Mitte am schnellsten.

Strömungsprofil: Parabel

$$v(x) = \frac{\Delta p}{2\eta l}(d^2 - x^2)$$



2) Laminare (wirbelfreie) Strömung im zylindrischen **Rohr** (Radius R_0, Länge l)

Strömungsprofil: Rotationsparaboloid

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R_0^2 - r^2)$$

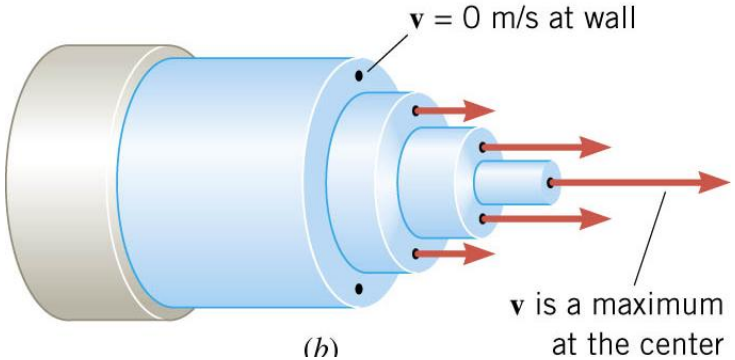
Im Rohr wächst v(r) mit Δp und der Fläche $A \sim R^2$,
aber v(r) nimmt ab mit steigendem η und Rohrlänge l

3.3 Hydrodynamik

Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömung im zylindrischen Rohr

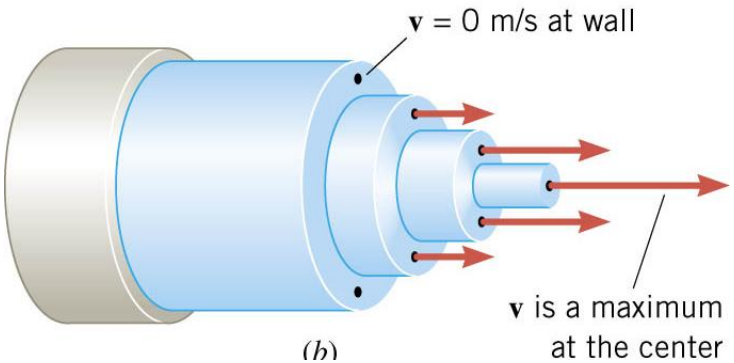
Volumenstromstärke:

$$I_V = \frac{dV}{dt} = \int_0^{R_0} v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$



3.3 Hydrodynamik

Gesetz von Hagen-Poiseuille für laminare Strömung im zylindrischen Rohr



Volumenstromstärke:

$$I_V = \frac{dV}{dt} = \int_0^{R_0} v(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\boxed{\Rightarrow I_V = \frac{\pi}{8\eta} \frac{R_0^4}{l} \cdot \Delta p}$$

$A \sim R^2$, $v_{max} \sim R^2$ ➔ $I_V \sim R^4$

Stromstärke $I_V \propto R_0^4$ ➔ sehr effizienter Mechanismus zur Regulierung des Bluttransportes über den Durchmesser der Adern!

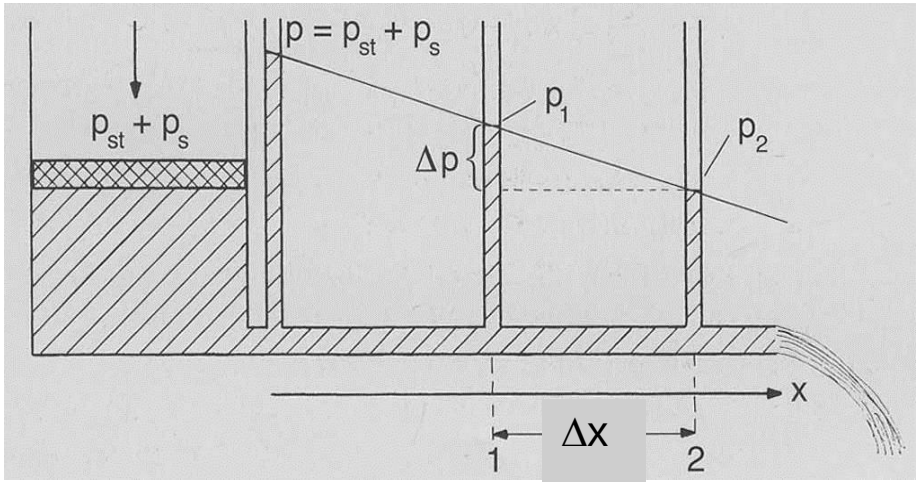
3.3 Hydrodynamik

Strömungswiderstand R

Die Reibungskraft F_R verursacht einen Strömungswiderstand R.
Das Druckgefälle Δp drückt das Fluid gegen F_R durch das Rohr.

$$I_V = \frac{\Delta p}{R}$$

Vol.-Durchsatz umso größer, je größer Δp und je kleiner der Strömungswiderstand R bzw. die Reibung.



Für R=const gilt (bei laminarer Strömung): $\Delta p / \Delta x = \text{const}$

3.3 Hydrodynamik

Analogie zur Elektrizitätslehre

$$I_V = \frac{\Delta p}{R}$$

In Newtonschen Flüssigkeiten gilt das Ohmsche Gesetz der Hydrodynamik:

$$\boxed{R = \text{const}}$$

d.h. R hängt nicht von Δp ab
(bzw. η hängt nicht von Δp ab),
nur von der Geometrie des Rohres.

z.B. zylindrisches Rohr: $$R = \frac{8\eta l}{\pi R_0^4}$$

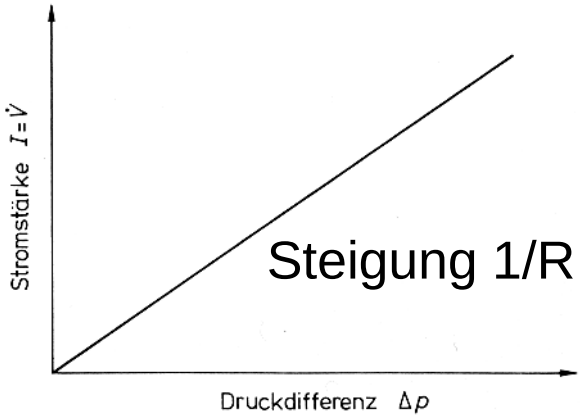


Abb. 3.35. Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm einer newtonschen Flüssigkeit, schematisch

Blut ist eine Nicht-Newtonsche Flüssigkeit,
η und damit R hängen von p ab
(Die langgestreckten Erythrozyten (rote Blutkörperchen) richten sich mit wachsendem Druck parallel zur Strömung aus)

(effektive Beschreibung durch Materialkonstante η versagt)

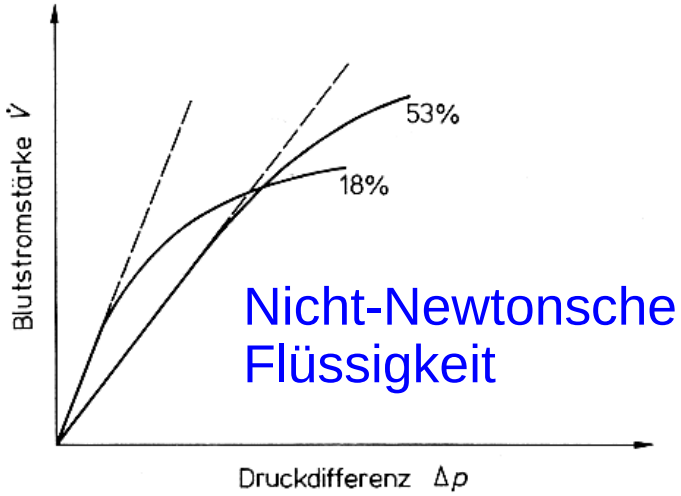


Abb. 3.36. Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm des menschlichen Blutes, halbschematisch; Parameter ist der Hämatokrit (Volumengehalt der Blutzellen)

3.3 Hydrodynamik

Kirchhoffsche Regeln

(aus der Elektrizitätslehre)

$$I_V = \frac{\Delta p}{R}$$

Reihenschaltung:

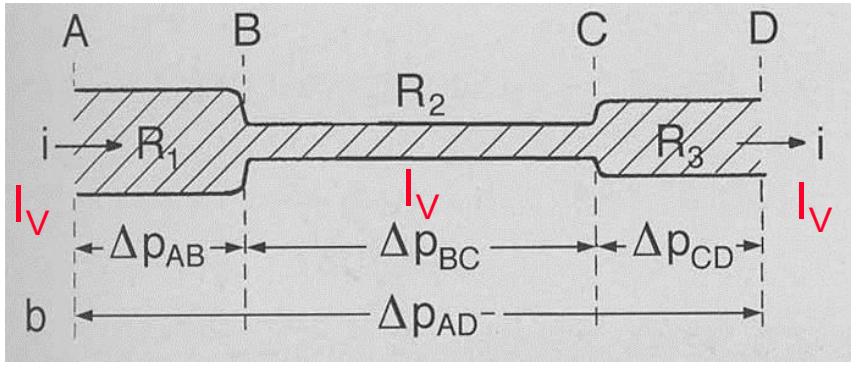
- *Stromstärken sind gleich (Kontinuitätsgleichung)*

$$I_V = I_1 = I_2$$

- *Druckdifferenzen addieren sich.*

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$$

Reihenschaltung (hintereinander)



$$\Delta p_{AD} = \Delta p_{AB} + \Delta p_{BC} + \Delta p_{CD}$$

- *Die Druckdifferenz in einem der Teilstücke ist umso kleiner, je kleiner der Widerstand in diesem Teilstück ist. (kein Widerstand ➔ kein Druckabfall)*

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\Delta p_1}{R_1} = \frac{\Delta p_2}{R_2} = I_2$$

- *effektiver Gesamt-Widerstand einer Reihenschaltung von Widerständen ist gleich der Summe der Einzelwiderstände.*

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = I_V R_1 + I_V R_2 = I_V R_{eff}$$

$$R_{eff} = R_1 + R_2$$

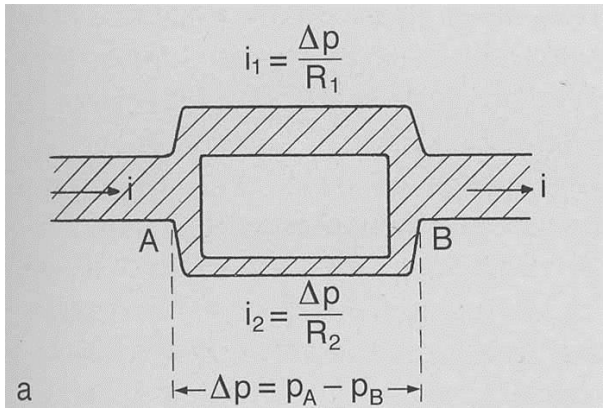
3.3 Hydrodynamik

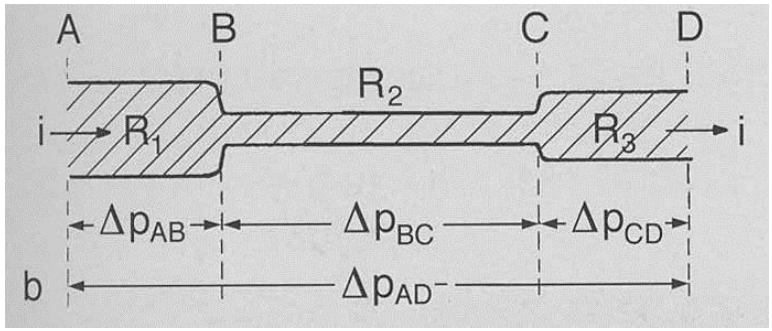
Zusammenfassung

Volumenstromstärke $I_V = \frac{\Delta p}{R}$

Ohmsches Gesetz

$R = const$





Parallelschaltung

$I_V = I_1 + I_2$

$\Delta p = \Delta p_1 = \Delta p_2$

$I_V = I_1 = I_2$

$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$

Reihenschaltung (hintereinander)

Kirchhoffsche Regeln

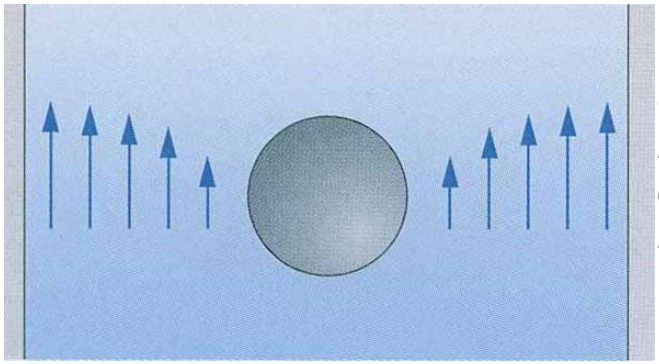
$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{eff} = R_1 + R_2$$

3.3 Hydrodynamik

Stokessches Reibungsgesetz

Reibungskraft auf eine **Kugel** mit Radius r (<< Behälterdurchmesser) in einer **laminaren** Strömung für kleine Sinkgeschwindigkeiten:



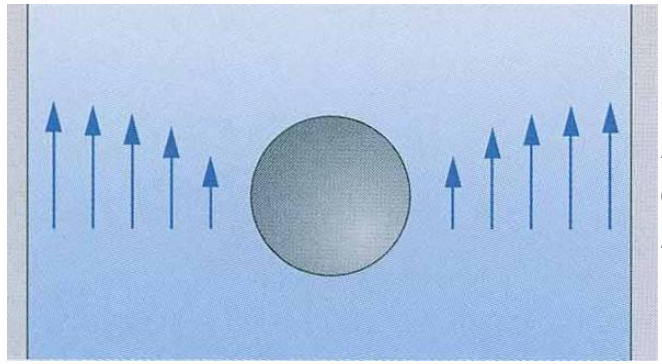
Geschwindigkeit im Koordinatensystem der fallenden Kugel

3.3 Hydrodynamik

Stokessches Reibungsgesetz

Reibungskraft auf eine **Kugel** mit Radius r (<< Behälterdurchmesser) in einer **laminaren** Strömung für kleine Sinkgeschwindigkeiten:

$$\boxed{F_R = 6\pi\eta r v}$$



Geschwindigkeit im Koordinatensystem der fallenden Kugel

1) Flüssigkeit haftet an Kugel, Geschwindigkeit v.
2) Im Abstand der Größenordnung r ruht die Flüssigkeit.
➔ Geschwindigkeitsgefälle dv/dx $\propto$ v/r (siehe (16))
➔ $F_R \propto \eta A\, v/r = \eta\, 4\pi r\, v$
(genaue, aufwändige Rechnung liefert 6 statt 4 …)

Bsp. für die Messung von η:

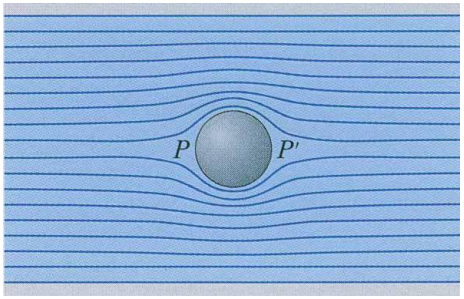
Sedimentation (Bsp. Kugel in Honig)

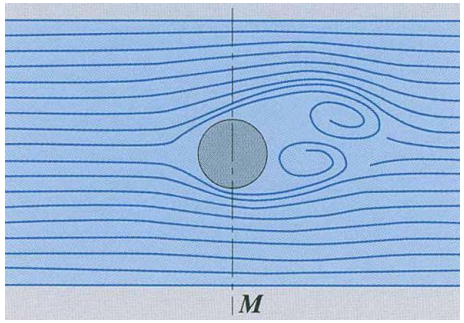
v = const ➔ Summe aus Gewichtskraft, Auftrieb und Reibungskraft = 0

$$F_g - F_a = F_R \qquad \Rightarrow \tfrac{4}{3}\pi r^3(\rho_{Kugel} - \rho_{flüssig})g = 6\pi\eta r v$$

3.3 Hydrodynamik

Laminare und turbulente Strömung





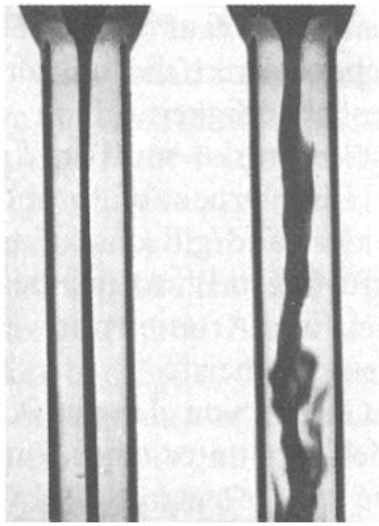


Abb.3.39. Laminare und turbulente Strömung; das wasser wurde bei Eintritt in das Glasrohr in dessen Achse eingefärbt (nach R.W. Pohl)

Turbulenz:

- extrem nicht-stationäre Strömung
- Wirbelbildung
- Geschwindigkeit an einem festen Punkt ändert sich häufig stark und abrupt
- tritt auf bei schnellen Strömungen und Hindernissen
- verursacht erhöhte Reibung
- Umschlag von laminar zu turbulent ab einer kritischen **Reynoldszahl** R_e (dimensionslos) (der kritische Wert ist problemabhängig, z.B. für ein Rohr ~ 1000)

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{\text{kin. Energie-Dichte} \sim \rho v^2}{\text{Reibungsverlust} \sim \eta v / L}$$

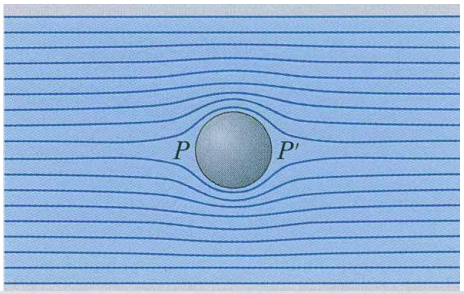
L = „charakteristische“ Länge

Aorta: $R_e \sim 750$

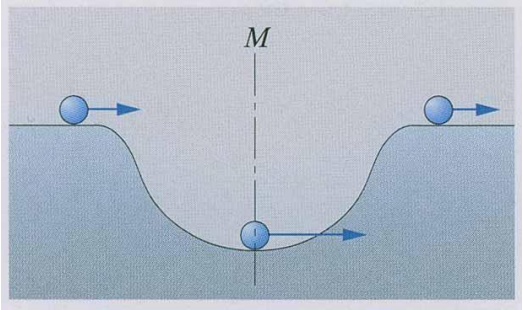
3.3 Hydrodynamik

Turbulente Strömung

Modellvorstellung: In der Nähe des Zylinders hat das Fluid eine höhere E_{kin} aber geringere E_{pot}.

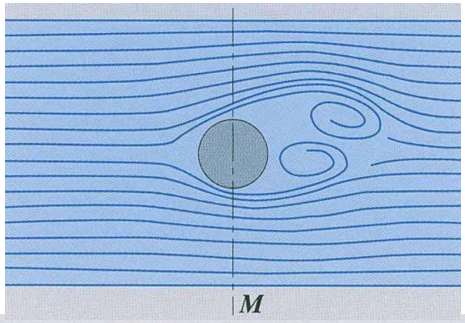


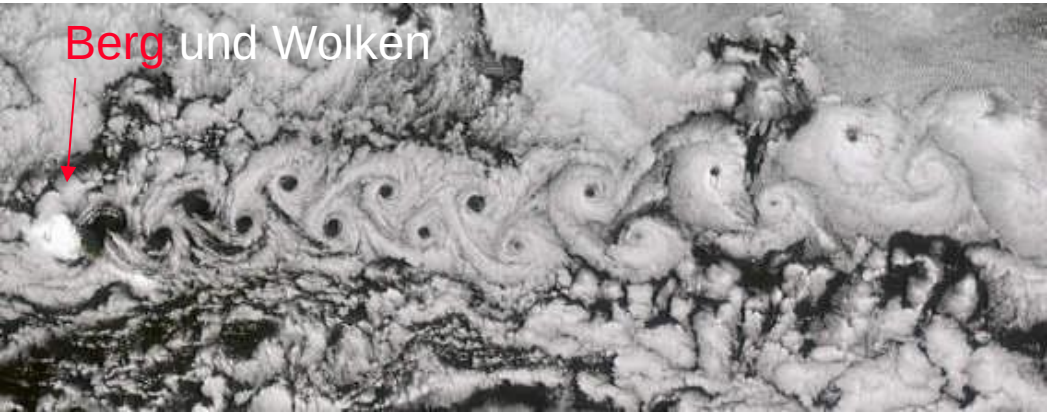
Ohne Reibung wird E_{kin} hinter dem Hindernis wieder komplett in E_{pot} umgewandelt.



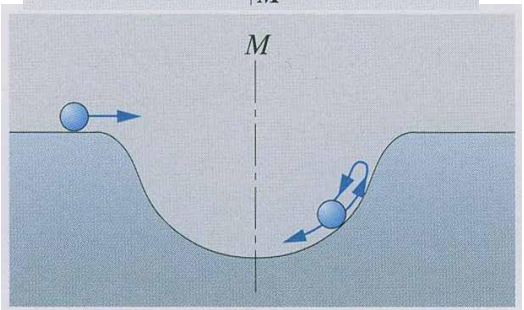
Durch Reibung verliert die Kugel Energie und schafft es nicht auf den Berg, sie kehrt um. Ähnlich kann das Fluid hinter dem Hindernis umkehren und bildet ein Wirbelpaar.

Die Wirbel lösen sich ab, neue bilden sich, es entsteht eine Karmansche Wirbelstraße.





Film: Ätna
http://www.youtube.com/watch?v=VbV98Z0QP-k



3.3 Hydrodynamik: Zusammenfassung

- **Kontinuitätsgleichung** $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const} = \Delta V / \Delta t = I_V$

- **Bernoulli-Gleichung** $p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$
  andere Formulierung der Energieerhaltung in einer inkompressiblen Flüssigkeit ohne Reibung *An Engstelle ist Druck geringer*

- **Viskosität** (durch innere Reibung) $F_z(x) = \eta A \frac{dv_z}{dx}$

- **Hagen-Poiseuille** (Volumenstromstärke in einem Rohr): $I_V = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} R_0^4$

- **Ohmsches Gesetz** (in Newtonschen Flüssigkeiten) $R = \text{const}$ $I_V = \frac{\Delta p}{R}$
  und **„Kirchhoffsche Regeln“** (*s. Folie 23*)

- **Stokes-Reibung** für eine Kugel: $F_R = 6 \pi \eta r v$