3.2 Hydrostatik

Flüssigkeiten: nicht formstabil, aber **volumenstabil** (V~const)

Keine Fernordnung; Teilchen gegeneinander frei verschiebbar.

Flüssigkeiten zeigen eine definierte **Oberfläche** (im Unterschied zum Gas).

Teilchen dicht gepackt, Flüssigkeiten sind nur schwach kompressibel,

d.h. Flüssigkeiten widerstehen Kräften **senkrecht** zur Oberfläche,

aber nicht *(langsamen)* **Scherkräften** (**parallel** zur Oberfläche)

Im Folgenden benutzen wir das **Modell der idealen Flüssigkeit:**

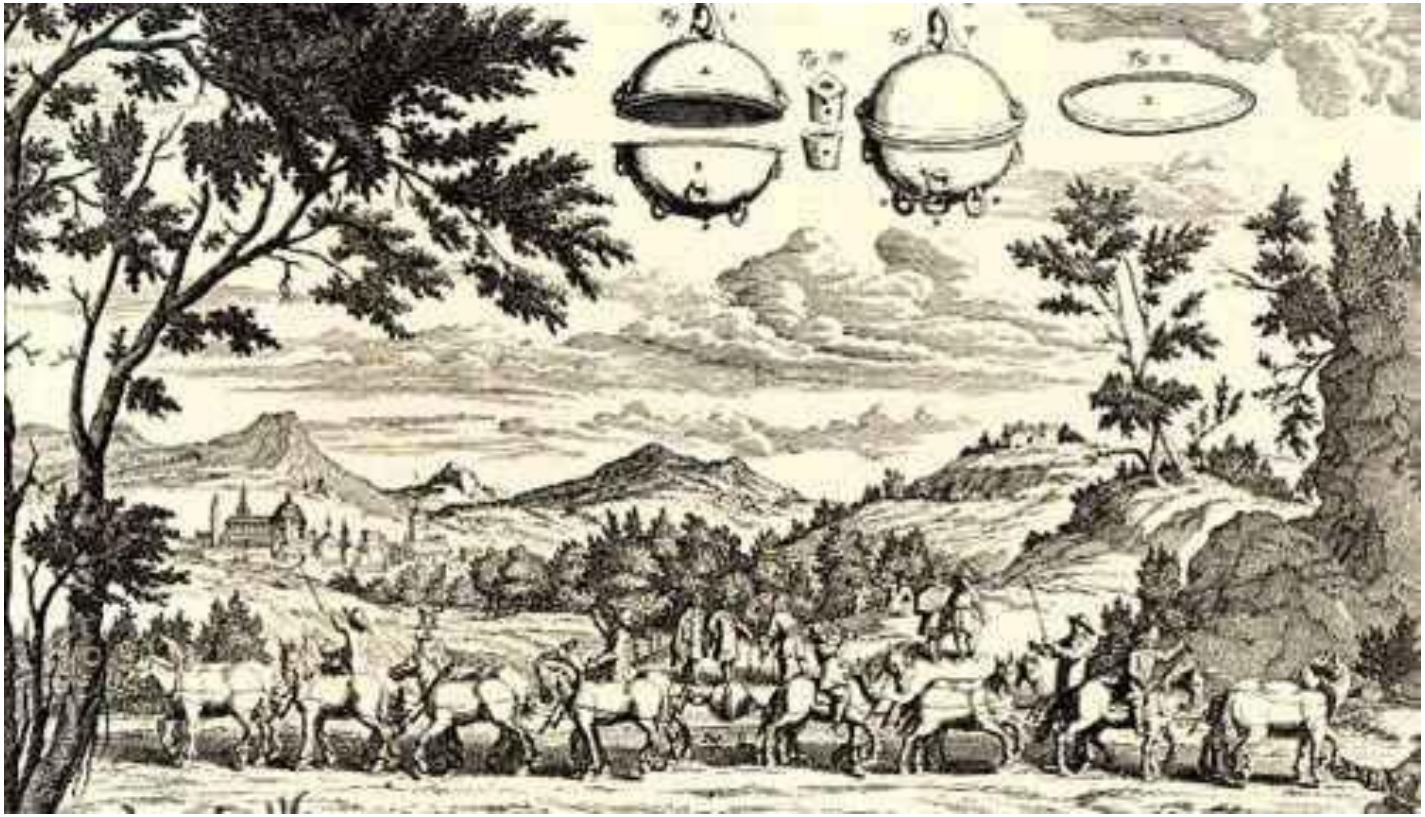
- inkompressibel
- keine innere Reibung (Viskosität), nur äußere Reibung an Behälterwand

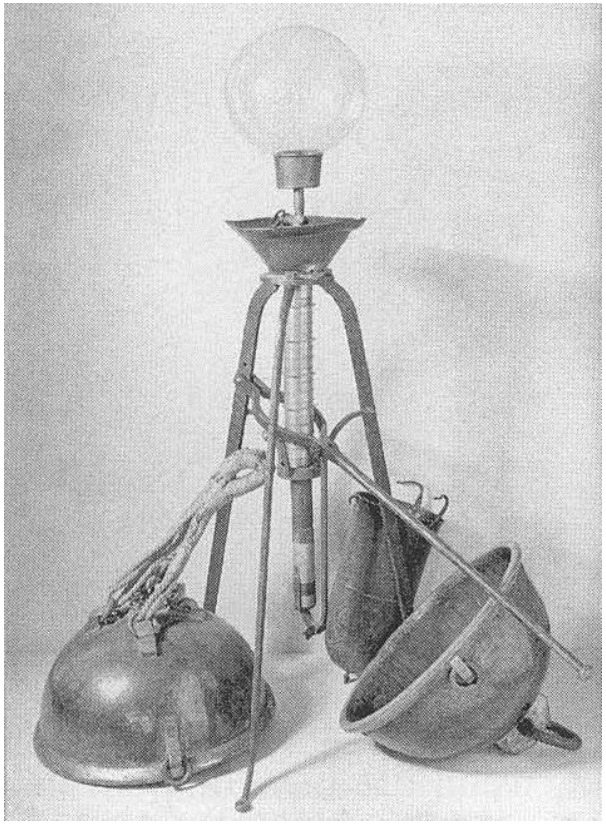
3.2 Hydrostatik

Magdeburger Halbkugeln

Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg (1654, Regensburger Reichstag)

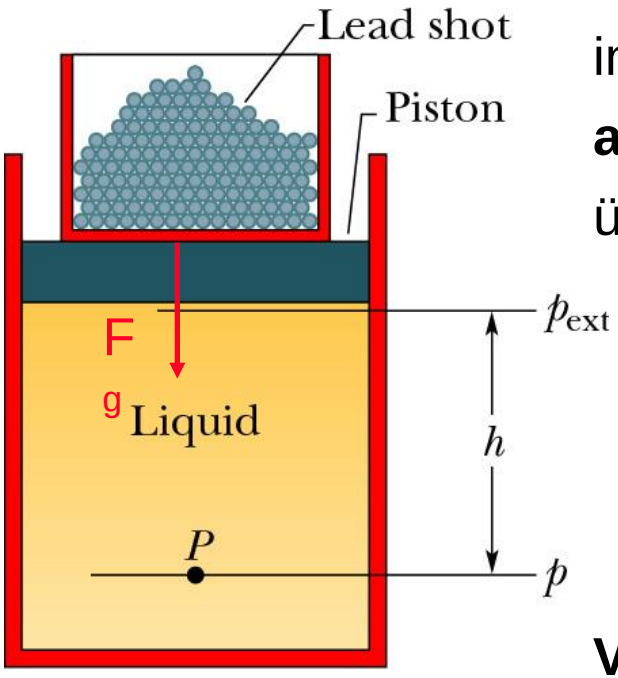
Halbkugeln mit d = 35.5 cm ➔ **F ~ 10 000 N**





3.2 Hydrostatik

Stempeldruck



Pascalsches Prinzip

Eine Druckänderung in einem abgeschlossenen, inkompressiblen Fluid wird **allseitig und unvermindert auf jeden Teil** des Fluids und auf die Behälterwände übertragen.

$\mathbf{p_{ext} = F_g / A}$ Druck in P: $\boxed{p = p_{ext} + \rho g h}$

(Beachte: F_g steht senkrecht auf A)

Volumenarbeit: Verschieben des Stempels um Strecke s:

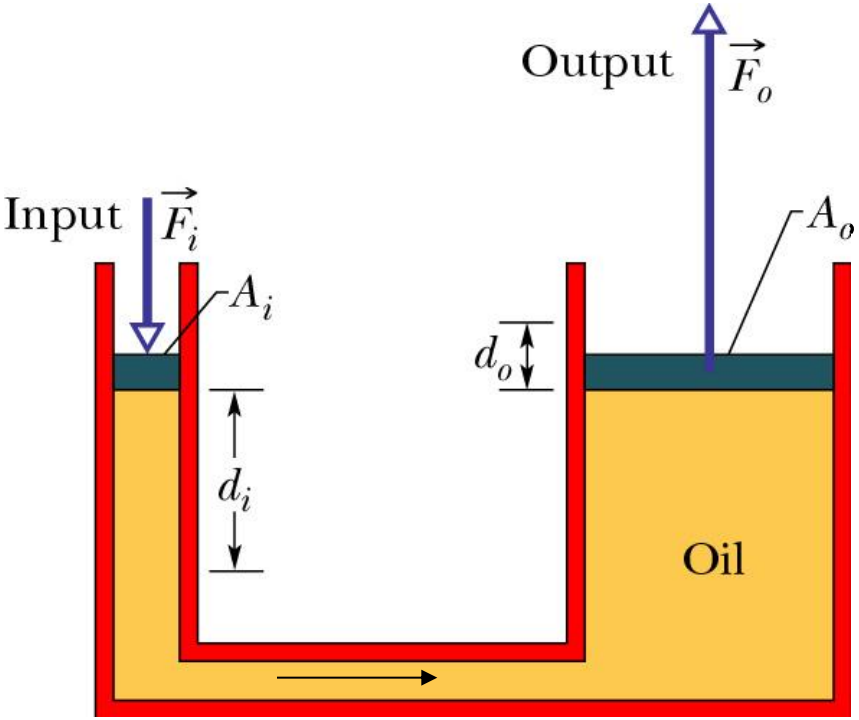
für p = const: $W = F\,\Delta s = p\,A\,\Delta s = p\,\Delta V$

$$\boxed{W = p \cdot \Delta V}$$

für p ≠ const: $W = \int F(s)ds = \int pA \cdot ds = \int p \cdot dV$

3.2 Hydrostatik

Stempeldruck, hydraulische Presse



Input: kleine Kraft F_i

Output: große Kraft F_o

Dabei wirkt F_i über die große Strecke d_i und F_o über die kleine Strecke d_o.

$p = F_i / A_i = F_o / A_o$ ➔ $F_o = F_i A_o / A_i > F_i$

(Analog zum Hebelgesetz

$\tau = F_i r_i = F_o r_o$ ➔ $F_o = F_i r_i / r_o > F_i$)

inkompressibel: $A_i d_i = V_i = V_o = A_o d_o$

➔ $d_o = d_i A_i / A_o < d_i$

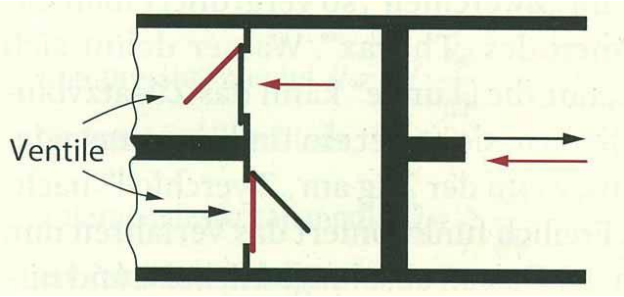
Energieerhaltung:

$W_i = F_i d_i = p A_i d_i = p V_i = p V_o = W_o$

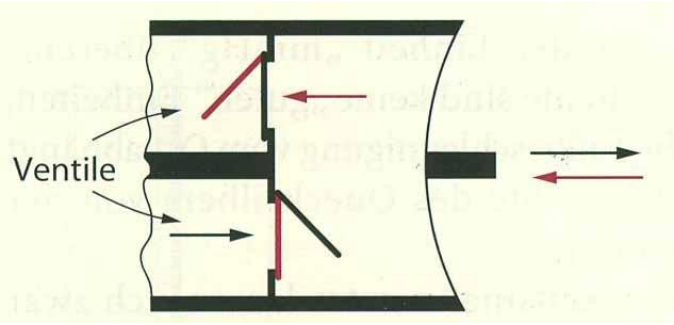
Bsp.: Hebebühne, hydraulische Bremse

3.2 Hydrostatik

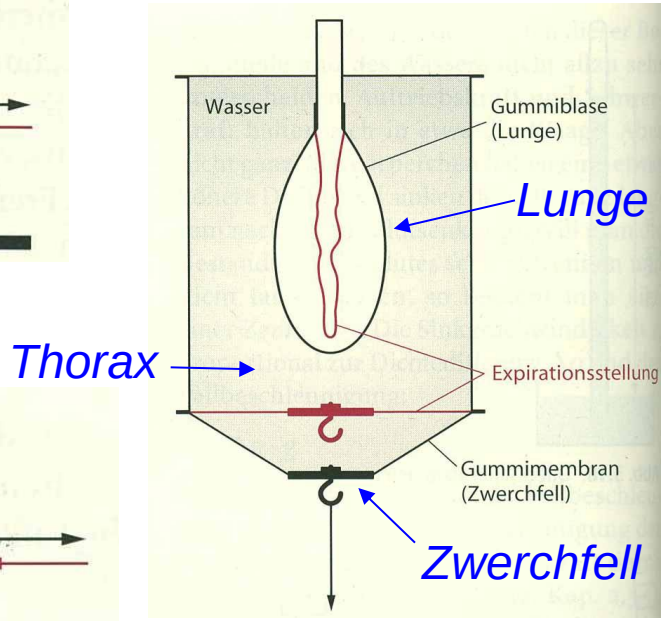
Kolbenpumpe



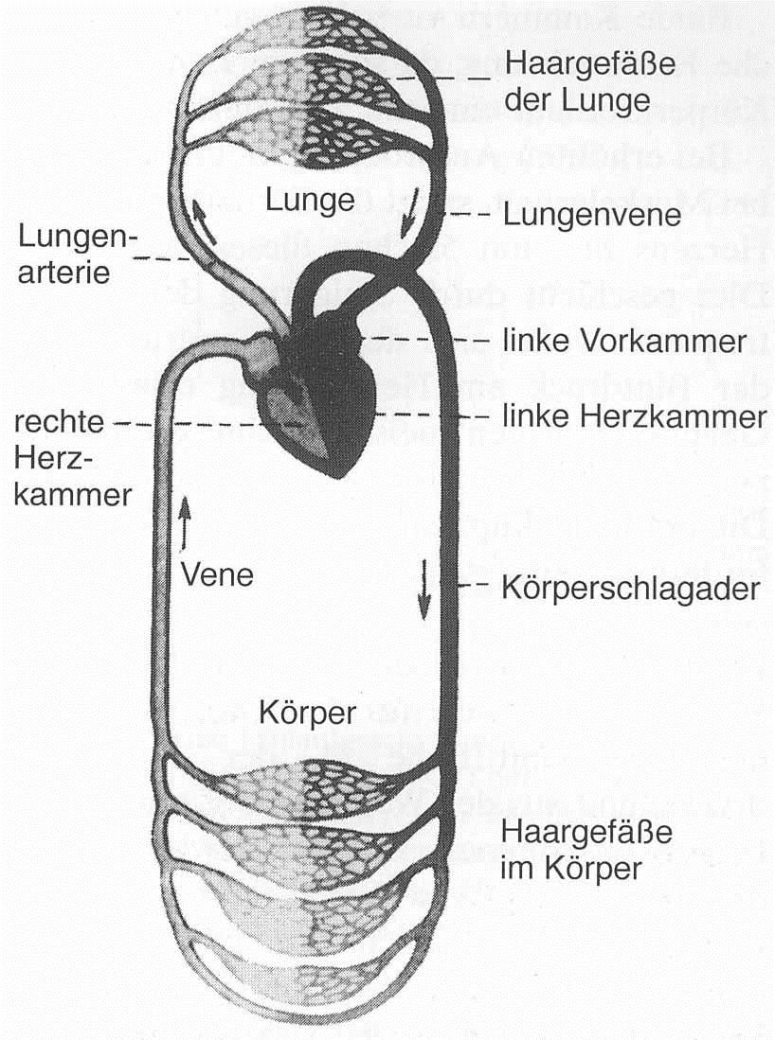
Membranpumpe



Lunge, Atmung



Herz, Blutkreislauf



Kolben/Membran erzeugt

Über- bzw. Unterdruck,

Ventile werden durch

Strömung geöffnet/geschlossen

3.2 Hydrostatik

Das Herz ist eine **doppelte Pumpe**:

1) rechte Kammer – Lunge – linker Vorhof

($p_{\text{Arteria pulmonalis}}$ ~ **2.6 kPa**, wg. Strömungswiderstand)

2) linke Kammer – Aorta / Körperkreislauf

– rechter Vorhof (p_{Aorta} ~ 120 mm Hg ~ **16 kPa**)

Beide Kammern müssen das gleiche Volumen pumpen/fördern, ca. **70 cm³/Puls** (4-5 l/min).

Volumenarbeit (pro Pulsschlag):

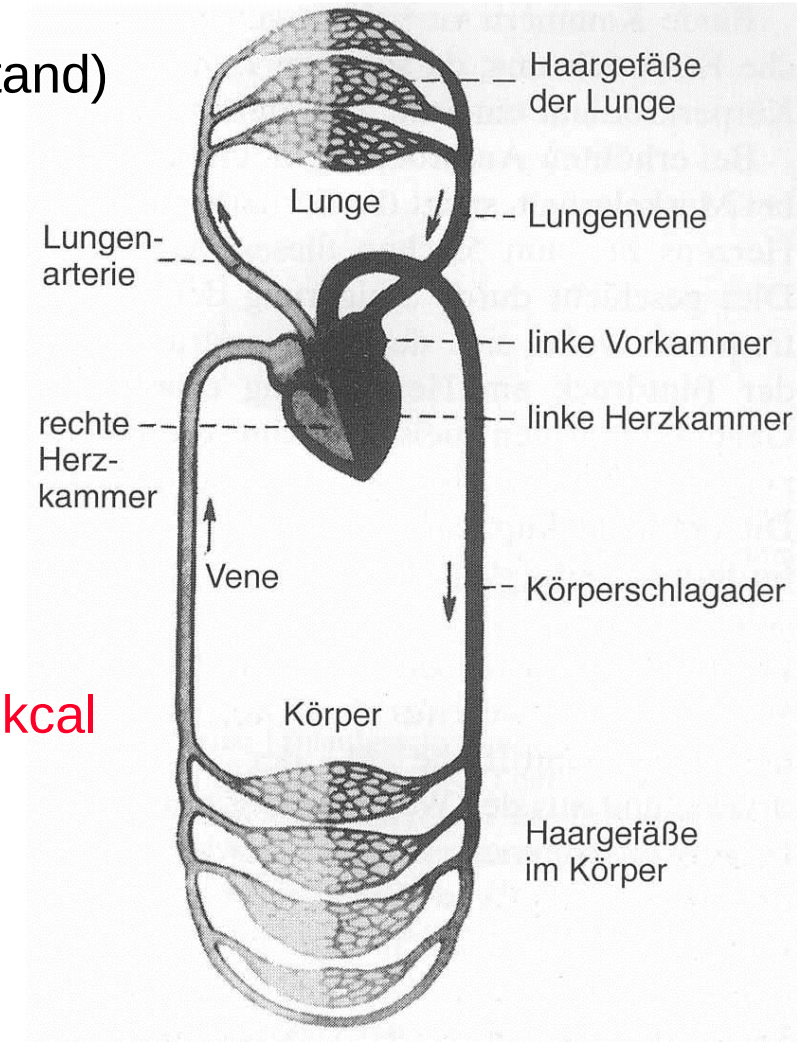
$W = p_{Ap} V + p_{\text{Aorta}} V = (2.6 + 16)\text{kPa } 70 \text{ cm}^3 \sim 1.3 \text{ J}$

Bei Pulsfrequenz 1 Hz: Arbeit / Tag ~ $1.1\ 10^5$ J ~ 27 kcal

Energie: elastische Dehnung der Gefäße, Wärme, kinetische Energie (gering)

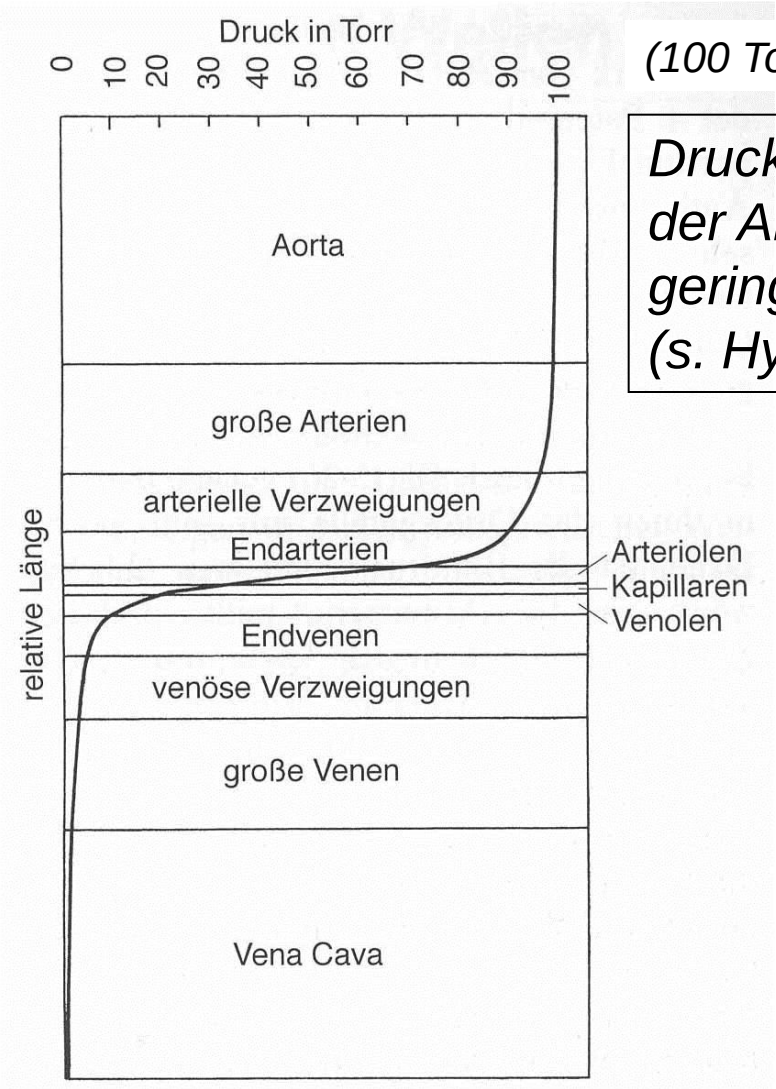
Blutdruck variiert zw. Systole (Austreibung) und Diastole (Füllung), z.B. 120/80 mm Hg

Herz, Blutkreislauf



3.2 Hydrostatik

Blutdruck



(100 Torr ~ 13 kPa)

Druck in der Arterie in der Armbeuge ist etwas geringer als in der Aorta (s. Hydrodynamik)

Blutdruck in den Füßen größer als im Kopf

3.2 Hydrostatik

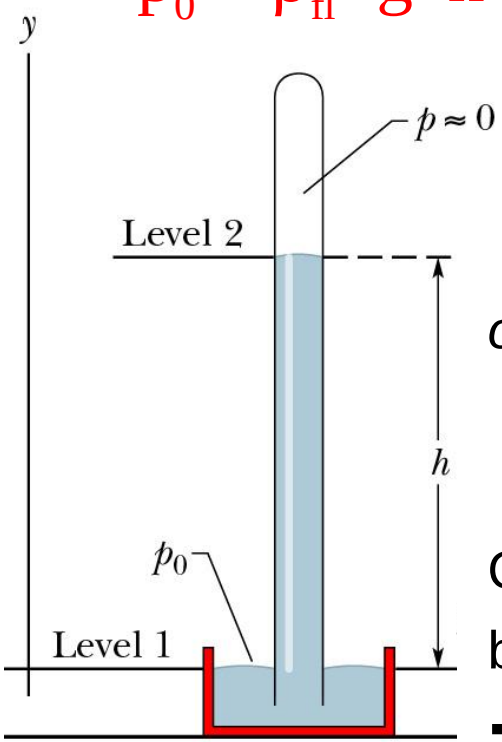
Druckmessung

Flüssigkeitsmanometer

evakuiertes Rohr,

Flüssigkeit bekannter Dichte ρ_{fl}

$$p_0 = \rho_{fl} \cdot g \cdot h$$



Vorsicht:
ρ hängt von der Temperatur ab,
g vom Ort

oder: Messung der Dichte:

$$\rho_{fl} = p_0 / (g \cdot h)$$

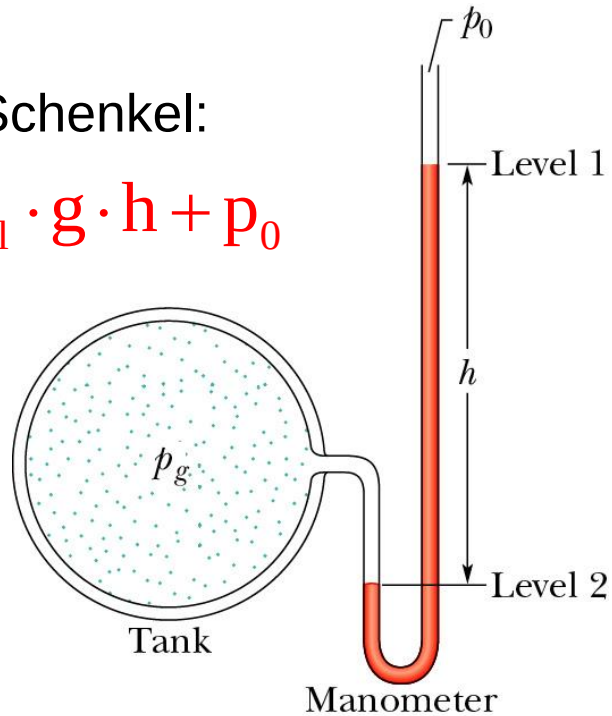
Quecksilber: h = 760 mm

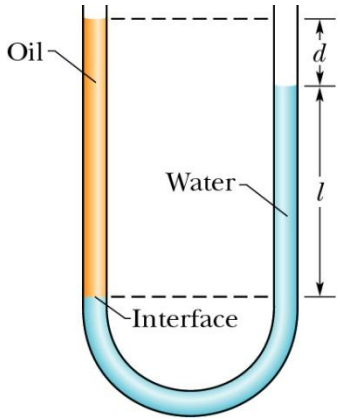
bei p_0 = 1.013 10^5 Pa

➔ **ρ_{Hg} = 13.6 g/cm³**

offener Schenkel:

$$p_g = \rho_{fl} \cdot g \cdot h + p_0$$



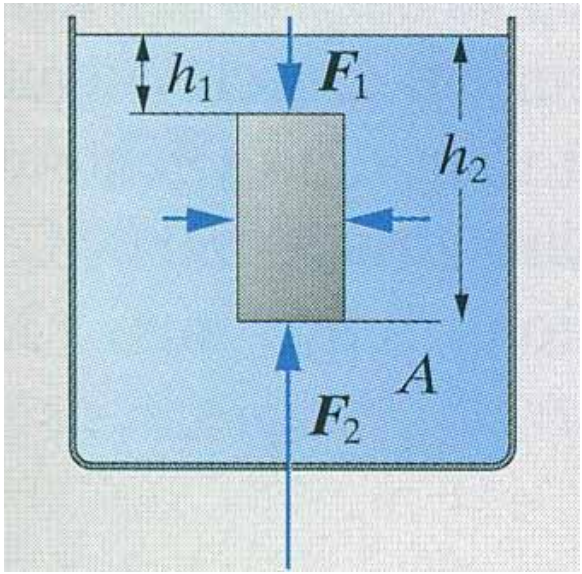


$$\rho_{Öl} \cdot g \cdot (l + d) + p_0$$
$$= \rho_{H_2O} \cdot g \cdot l + p_0$$

unabh. von p_0

3.2 Hydrostatik

Auftrieb



Prinzip von Archimedes

$F_1 = \rho_{fl}\, g\, h_1\, A$, $\quad F_2 = \rho_{fl}\, g\, h_2\, A \;> F_1$

$F_{Auf} = F_2 - F_1 = \rho_{fl}\, g\, (h_2 - h_1)\, A = \rho_{fl}\, g\, V = m_{fl}\, g = F_{Auf}$

Auftriebskraft = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit

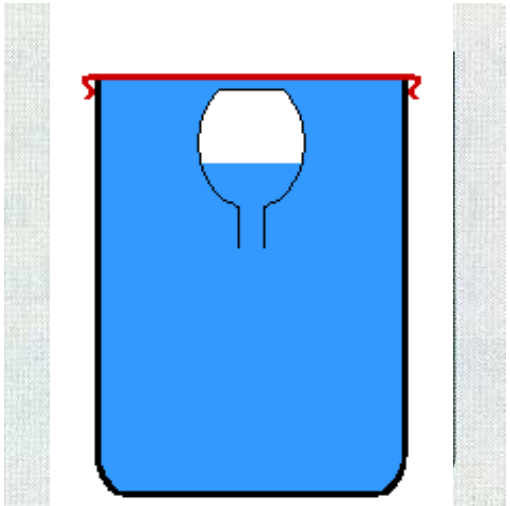
Erlaubt Messung von Volumen und Dichte eines Körpers:

1) $V = F_{auf} / (\rho_{fl}\, g)$

2) $\rho_{Körper} / \rho_{fl} = m_{Körper}\, g / F_{auf}$

- Dichte einer Flüssigkeit:

3) $\rho_{fl} / \rho_{H2O} = (F_{auf}$ in Flüssigkeit$) / (F_{auf}$ in $H_2O)$



Schwimmen: $\rho_{Körper} < \rho_{fl} \;\Rightarrow F_g < F_{auf}$ *(vollst. eingetaucht)*

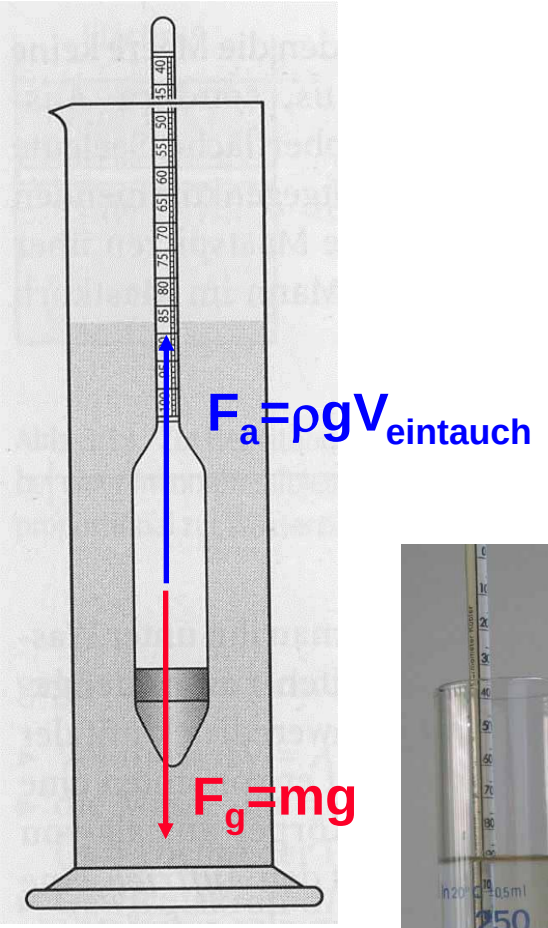
Schweben: $\rho_{Körper} = \rho_{fl} \;\Rightarrow F_g = F_{auf}$

Tauchen/sinken: $\rho_{Körper} > \rho_{fl} \;\Rightarrow F_g > F_{auf}$

Fische ändern ihre mittlere Dichte über Schwimmblase

3.2 Hydrostatik

Auftrieb



Aräometer *Experiment*

Mostwaage, „Grad Öchsle“

Bestimmung der Dichte des Traubenmostes.

Messgerät schwimmt in Most, über die Eintauchtiefe wird die Dichte ρ_{Most} bestimmt

$h_{eintauch}$ / $V_{eintauch} = m_{Messgerät} g / \rho_{Most}\, g$

Öchslegrade = ρ_{Most} – 1000 g/l

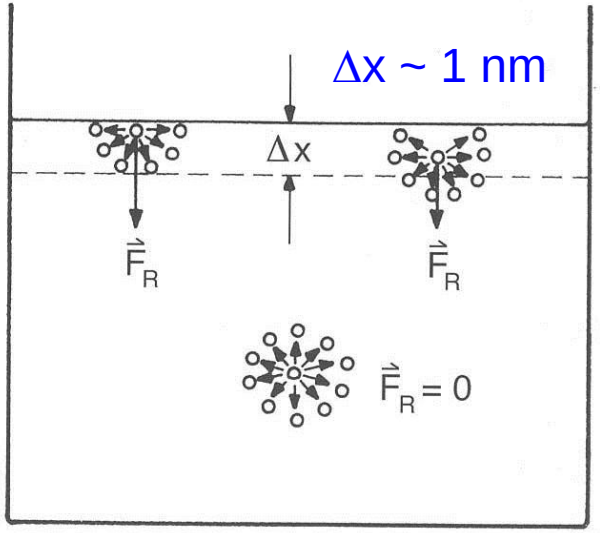
z.B. ρ_{Most} = 1083 g/l ➔ 83° Öchsle

Über das Mostgewicht lässt sich der voraussichtliche Alkoholgehalt des Weines bestimmen
(wenn der Wein durchgegoren ist, d.h. der gesamte Zucker in Alkohol umgewandelt wurde).

Laktometer: Fettgehalt der Milch

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Oberfläche / Grenzfläche gegen Vakuum (oder Luft)



Moleküle in der Flüssigkeit ziehen sich gegenseitig an (vgl. chem. Bindung).

Im Flüssigkeitsinneren ist die resultierende Kraft $F_R = 0$;

Teilchen an der Oberfläche werden dagegen nach innen gezogen.

Oder: an der Oberfläche gibt es weniger attraktive Nachbarn, die potentielle Energie ist höher.

➔ **ohne äußere Kräfte ist die Oberfläche minimal (pro Volumen)**

Vergrößerung der Oberfläche um ΔA kostet potentielle Energie ΔE.

➔ spezifische Oberflächenenergie ε bzw. Oberflächenspannung σ:

$$\boxed{\varepsilon = \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}}$$

Einheit: 1 J/m^2 = 1 N/m; *Bsp.* H_2O: $\sigma \sim 7.3\ 10^{-2}$ N/m @ 20° C

Hg: $\sigma \sim 0.48$ N/m

resultierende Phänomene: Benetzung, Kapillarität

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Oberfläche / Grenzfläche gegen Vakuum (oder Luft)

$$\varepsilon = \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$

➔ **ohne äußere Kräfte ist die Oberfläche minimal (pro Volumen)**

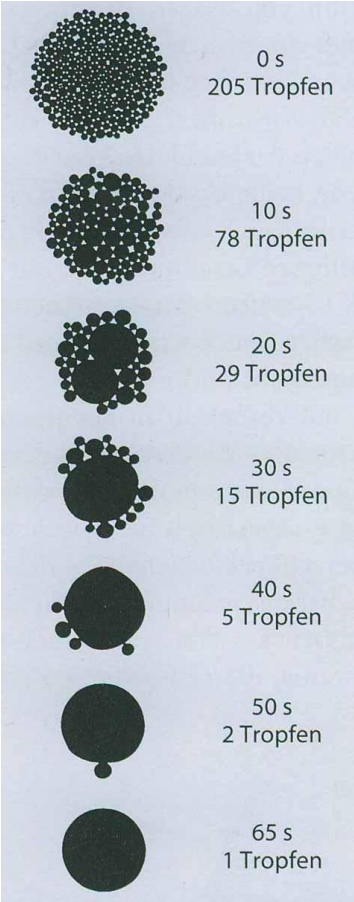
➔ **Kugelform** *(Bsp.: Seifenblasen ohne äußere Kräfte)*

Kugel hat die kleinste Oberfläche bei gegebenem Volumen,

Bsp.: $V_0 = 1m^3$

Kugel: r ~ 0.62 m; $\mathbf{A/V_0} = 4\pi r^2 / (4\pi r^3/3) = 3/r \sim \mathbf{4{,}8\ /\ m}$

Würfel: a = 1m; $\mathbf{A/V_0} = 6a^2 / a^3 = 6 / a = \mathbf{6\ /\ m}$



Bsp.:
Zusammenschließen
von Hg-Tropfen

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Oberfläche / Grenzfläche gegen Vakuum (oder Luft)

Vorsicht: Oberflächenspannung σ Einheit: 1 J/m² = 1 N/m

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$

Energie pro Fläche !
Kraft pro Länge !

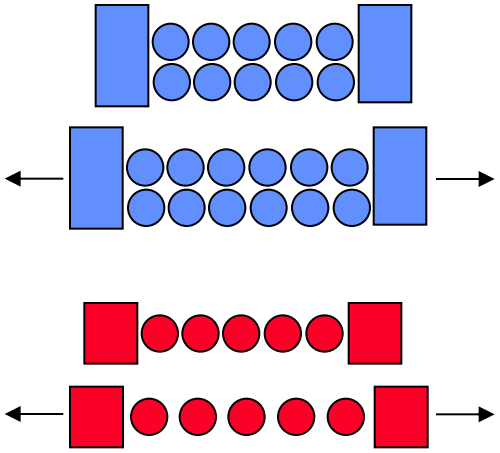
(elastische) Spannung σ = F/A Einheit: 1 N/m²

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{E \cdot A}$$

Gleiches Symbol,
andere Bedeutung

Unterschied z.B. zwischen Aufblasen einer

- *Seifenblase (wachsende Anzahl Atome an Oberfläche, O-Spannung konstant)*
- *Gummiblase (konst. Anzahl Atome an der Oberfläche, elastische Spannung („Feder“) wächst mit Radius)*



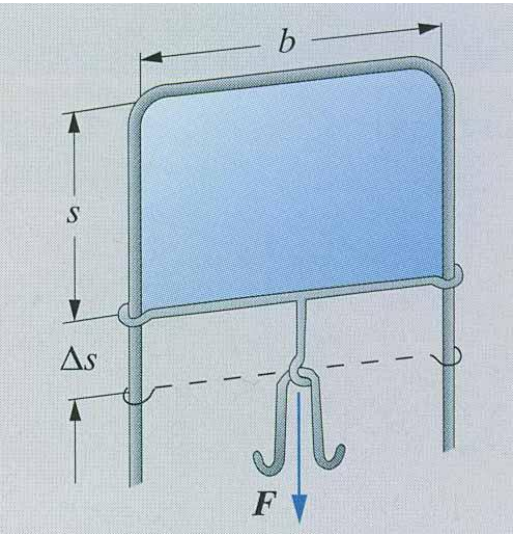
3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Oberfläche / Grenzfläche gegen Vakuum (oder Luft)

Oberflächenspannung σ

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$

Einheit: 1 J/m^2 = 1 N/m



Arbeit bzw. Kraft zum Vergrößern der Oberfläche:

$\Delta E = F\,\Delta s = \sigma\,\Delta A = \sigma\,\mathbf{2}\,b\,\Delta s$

(Faktor 2: Oberfläche vorne und hinten)

➔ **$F = 2\,b\,\sigma$** (Randlinie mal σ, *unabh. von Δs, im Gegensatz zur elast. Dehnung*)

Kraft || Oberfläche

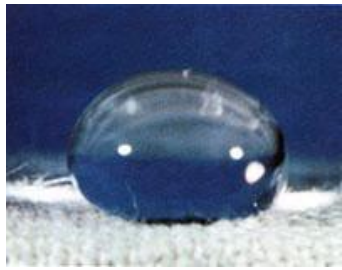
Ring um Δs aus Flüssigkeit ziehen

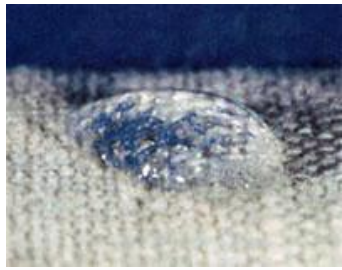
$\Delta A = 2\ 2\pi r\,\Delta s$, $\Delta E = F\,\Delta s$, **$\sigma = F / 4\pi r$**

F = 0.04 N

r = 4.5 cm ➔ $\sigma \sim 7\ 10^{-2}$ N/m

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen





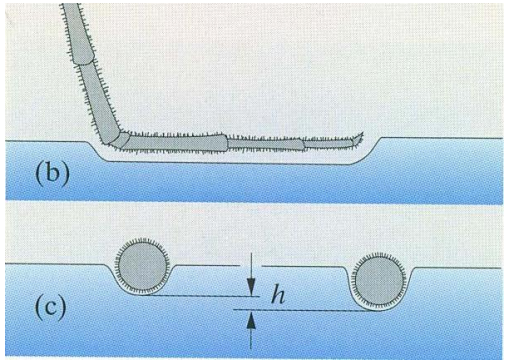
Seifenblasen

In reinem Wasser ist σ groß, Tröpfchenbildung

Oberflächenspannung σ ist sehr empfindlich gegen Verunreinigungen

➔ Waschmittel reduzieren σ (etwa um Faktor 2-3; Seife an Oberfläche)

➔ Wasser gelangt besser zwischen Schmutz & Waschgut (*benetzt besser*)



Bsp. Oberflächenspannung

Oberfläche würde größer, wenn die (*nicht benetzten*) Beine des Wasserläufers tiefer eintauchen

➔ Oberflächenspannung gewinnt gegen Gravitation

$F = \sigma \, \Delta A / \Delta s > mg = \rho \, V \, g$

const * Länge > const * Länge^3

➔ **geht nur für kleine Längen**, z.B. Insekten

Wird σ zu klein (z.B. Waschmittel), geht der Wasserläufer unter.

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

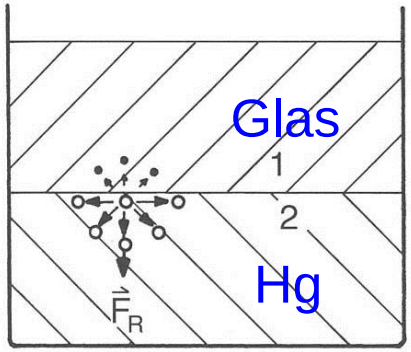
Oberfläche / Grenzfläche gegen Festkörper (oder zw. Festkörpern)

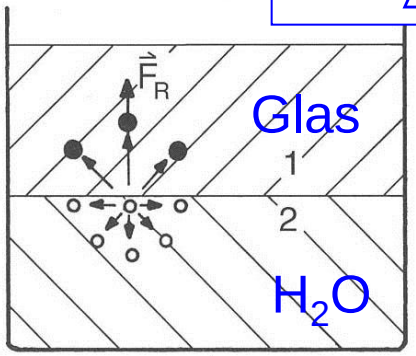
Kohäsion: Anziehung eines Oberflächenmoleküls ins Innere des eigenen Stoffes

Adhäsion: Anziehung eines Oberflächenmoleküls durch Nachbar-Stoff

Spezifische Grenzflächenenergie

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}$$





Kohäsion > Adhäsion

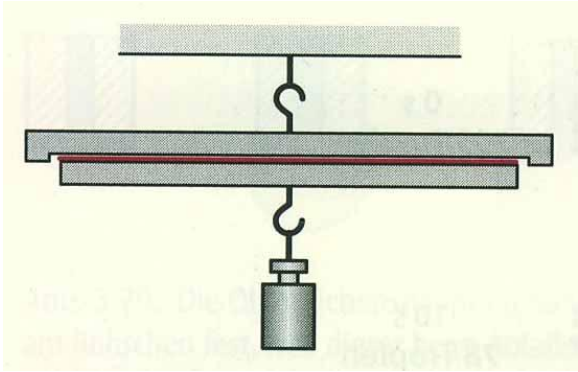
(H_2O auf Wachs / Fett)

nicht benetzend

Kohäsion < Adhäsion

(H_2O / Ethanol auf Glas)

benetzend, Tropfen zerfließt



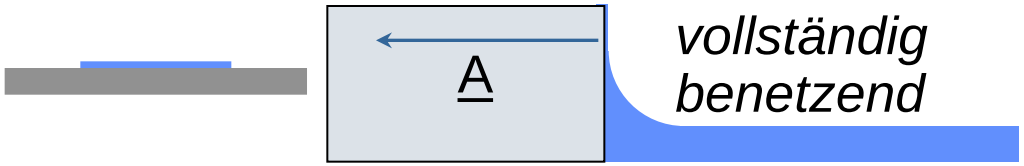
Kräfte wirken nur auf sehr geringem Abstand (~ 1nm).

Bsp.: Farbe haftet an Wand, nasses Papier an Finger

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

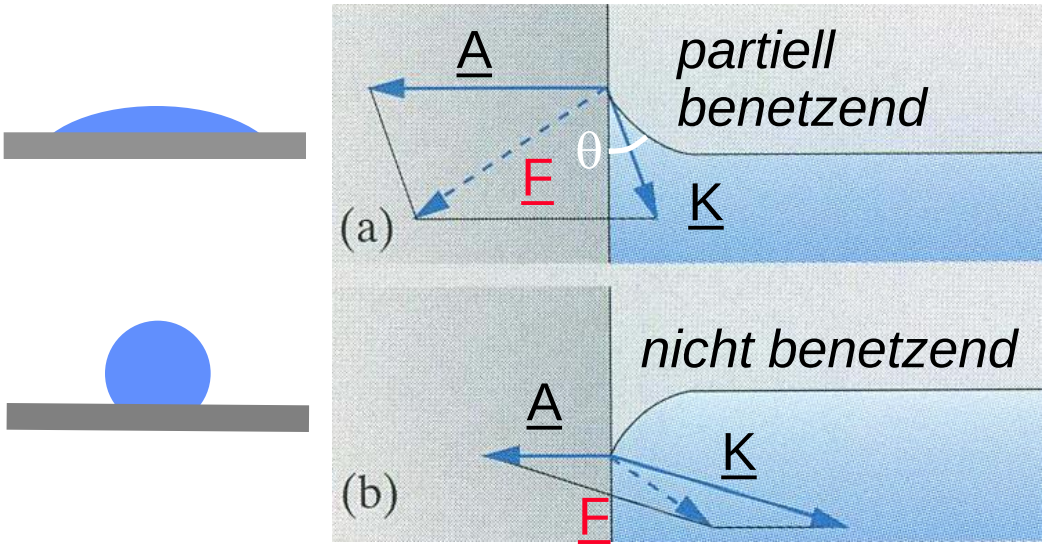
Vertikale Grenzfläche fest-flüssig

Im Gleichgewicht: F senkrecht Oberfläche



Kohäsion K <<< Adhäsion A

➔ Randwinkel (fest-flüssig) $\theta = 0°$



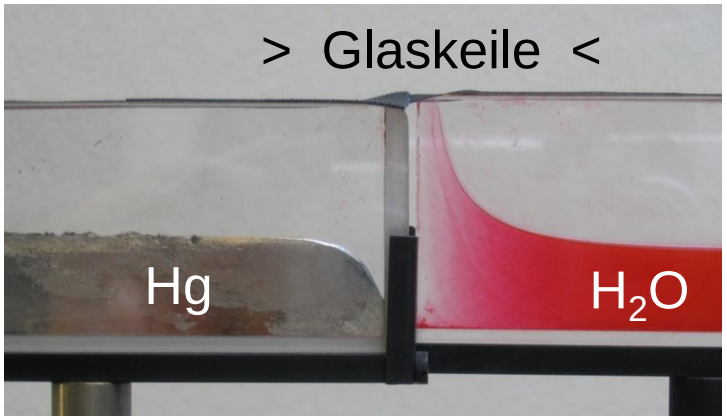
Kohäsion K kleiner als Adhäsion A

➔ resultierende Gesamtkraft F zur Wand

$(0° < \theta < 90°)$

Kohäsion K größer als Adhäsion A

➔ resultierende Gesamtkraft F weist ins Innere der Flüssigkeit $(\theta > 90°)$



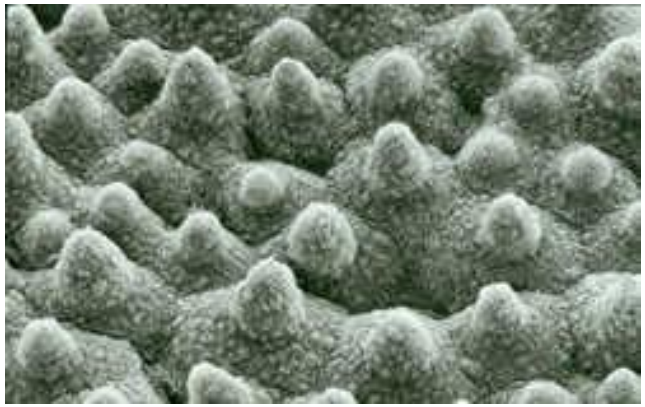
H_2O auf Glas: völlig benetzend $(\theta = 0°)$

Hg auf Glas: nicht benetzend

$(\theta = 140°)$

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Lotus-Effekt



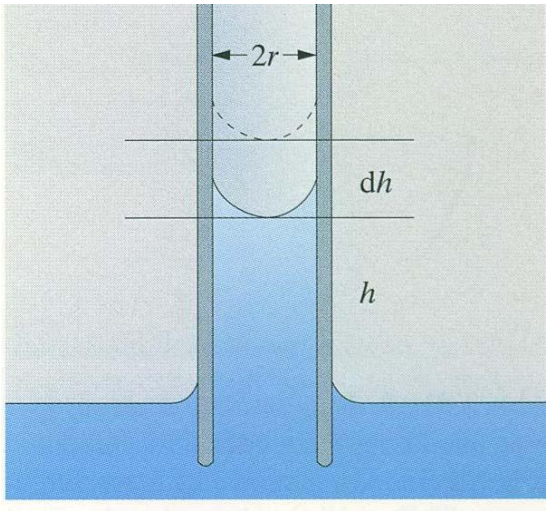
nanostrukturierte hydrophobe Oberfläche
bietet
geringe Kontaktfläche
und damit
geringe Adhäsionskräfte
➔ wird nicht benetzt
(„*superhydrophob*“)

Schmutz (auch hydrophober) oder z.B. wasserlöslicher Klebstoff haften nicht, sondern werden durch Wasser weggespült

biologische Bedeutung:
Schutz vor Keimen, Algen, …

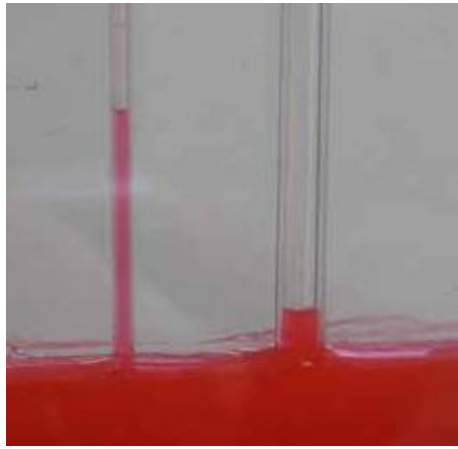
3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Kapillarität Falls die Flüssigkeit eine Kapillare (Radius r) **vollständig benetzt:**



die **freie Flüssigkeitsoberfläche (Flüssigkeit – Luft) wird kleiner**, wenn die **Flüssigkeit um Δh ansteigt**:

$$E_{Ob} = \sigma A = \sigma\, 2\pi r\, h$$



Dabei steigt die potentielle Energie:

$$E_{pot} = mg\,h = \rho V g\,h = \rho\, \pi r^2 h\, g\, h$$

$$E_{Ob} = E_{pot} \Rightarrow \boxed{h = 2\sigma / (r\, \rho\, g)}$$

Bei **partieller Benetzung** mit Randwinkel θ:

$$h = 2\sigma \cos(\theta) / (r\, \rho\, g)$$

Gleichgewicht zw. Oberflächenspannungen
1) flüssig-gasförmig
2) fest-flüssig, 3) fest-gasförmig

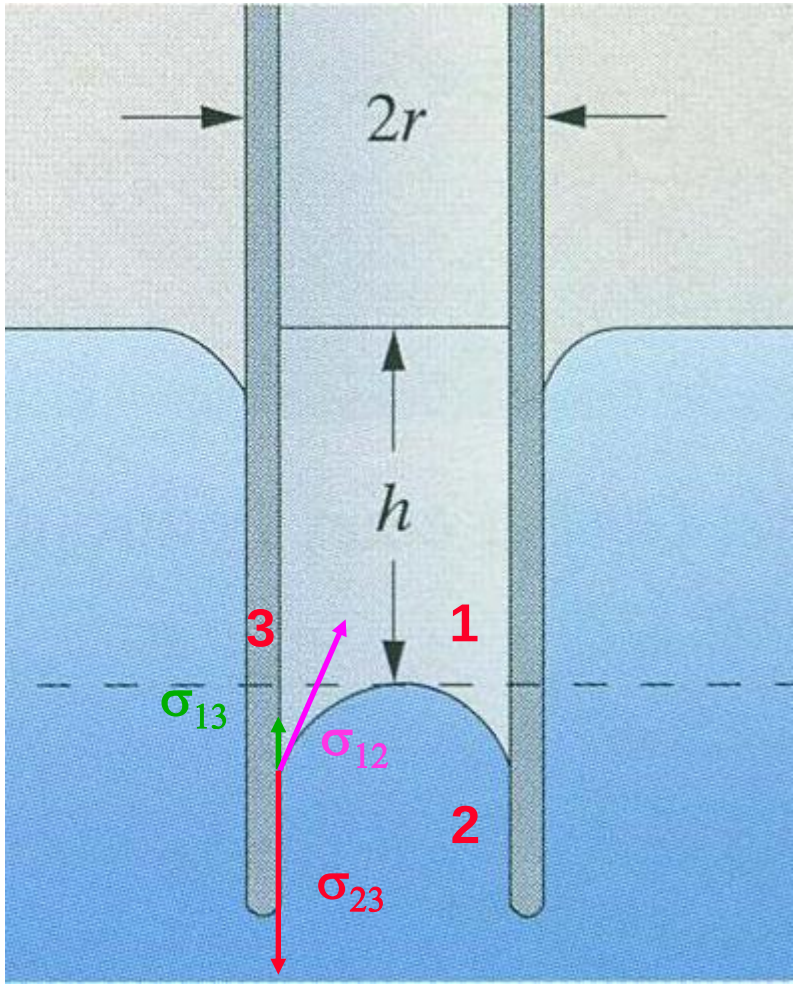
h groß für r klein: *H_2O in Glas: h = 1.5mm / 15cm / 1.5m für r = 1cm / 0.1mm / 10μm*

Wichtig für Wasserversorgung von Bäumen

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Kapillar-Depression für eine **nicht-benetzende Flüssigkeit**

Gleichgewicht zw. den Oberflächenspannungen fest-flüssig σ_{23} (nach unten), fest-gasförmig σ_{13} (nach oben) und flüssig-gasförmig σ_{12}



Im Gleichgewicht ist die resultierende Spannung in der Vertikalen = 0: $\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos(\theta)$

$$h = 2\sigma_{12} \cos(\theta) / (r\, \rho\, g)$$
$$= 2(\sigma_{13} - \sigma_{23}) / (r\, \rho\, g)$$

Kohäsion > Adhäsion:
$\theta > 90°$ ➔ $\cos(\theta) < 0$
oder: $\sigma_{23} > \sigma_{13} > 0$
➔ $h < 0$

Die Flüssigkeit sinkt ab, um die energetisch ungünstige Grenzfläche fest-flüssig ($\sigma_{23} > 0$) zu verkleinern.

3.2 Hydrostatik: Grenzflächen

Zusammenfassung Kapillarität

Die Energie wird minimiert für

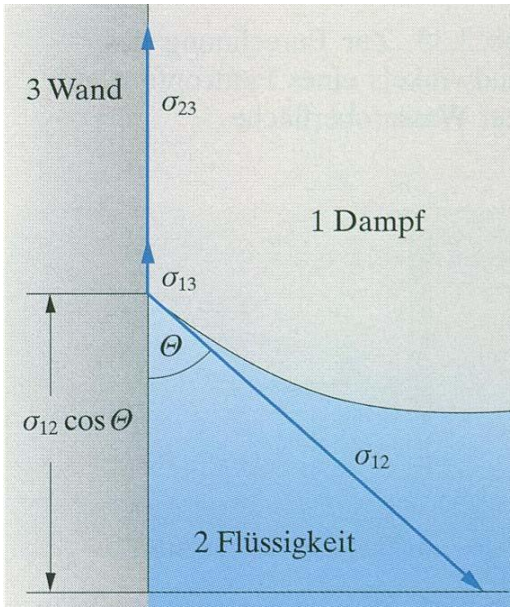
die **potentielle Energie** und

die **3 Oberflächenspannungen**

fest-flüssig σ_{23} (>0: nach unten),

fest-gasförmig σ_{13} (>0: nach oben) und

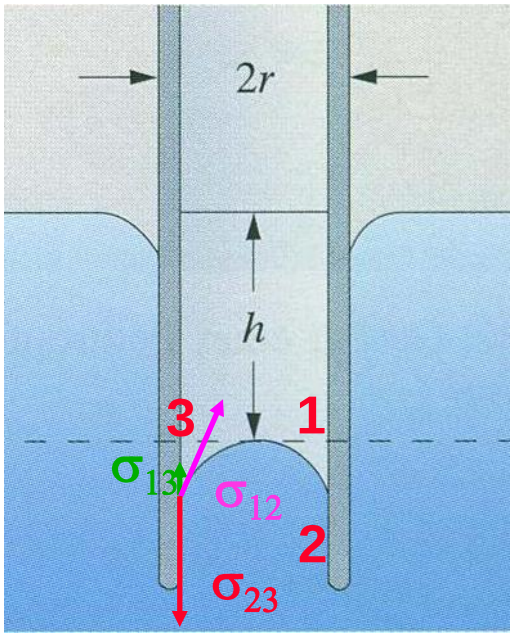
flüssig-gasförmig σ_{12} (>0; tangential)



1) Adhäsion sehr groß ➔ vollständige Benetzung.

(also $|\sigma_{23}|$ sehr groß, aber $\sigma_{23} < 0$)

Danach wird die Oberfläche flüssig-gasförmig (σ_{12}) minimiert, d.h. die Flüssigkeitssäule hochgezogen.



2) Bei nicht vollständiger Benetzung gibt es einen charakteristischen Randwinkel $\theta > 0$.

Hier wird die Flüssigkeit durch die Differenz der Randspannungen σ_{13}-σ_{23} verschoben (>0: hochgezogen; <0: Kapillardepression)

3.2 Hydrostatik: Zusammenfassung

- Druck ist allseitig, keine Vektorgröße.
- Schweredruck in inkompressibler Flüssigkeit: $p(h) = \rho g h$

im idealen Gas: $p(h') = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h'}$

- Volumenarbeit: $W = p\,\Delta V$
- Stempeldruck / Hydraulik: $F_1 / F_2 = A_1 / A_2$
- Auftrieb = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit: $F_{Auf} = \rho_{fl}\, g\, V_{Körper} = m_{fl}\, g$

Oberflächen / Grenzflächen:

- Oberflächenspannung (spez. Oberflächenenergie): $\boldsymbol{\sigma = \Delta E / \Delta A}$
- $\sigma > 0$ ➔ Oberfläche will minimal werden
- Steighöhe in Kapillare (3 versch. Oberflächen): $\boldsymbol{h = 2\sigma \cos(\theta) / (r\, \rho\, g)}$
- Im Gleichgewicht steht die Gesamtkraft senkrecht auf Fl.-Oberfläche