2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation

2.2.4 Harmon. Schwingungen: Zusammenfassung

Horizontales **Federpendel**

Differentialgleichung (DGL):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m}x(t)$$

Lösung der DGL:

$$x(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{D/m}$$

ω unabh. von A und φ !

Vertikales **Federpendel**

$$\ddot{x}(t) = -(D/m)\,x(t) + g$$

$$\omega = \sqrt{D/m}$$

Mathematisches **Fadenpendel**

$$\ddot{\theta}(t) \approx -\frac{g}{L}\theta(t)$$

$$\theta(t) = A\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

ω unabhängig von m

Gedämpfte Schwingung

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) - 2\delta \cdot \dot{x}(t)$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t}\sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{(D/m) - \delta^2}$$

Erzwungene Schwingung

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + D \cdot x = F_0\cos(\omega_e \cdot t)$$

für große t:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi)$$

2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

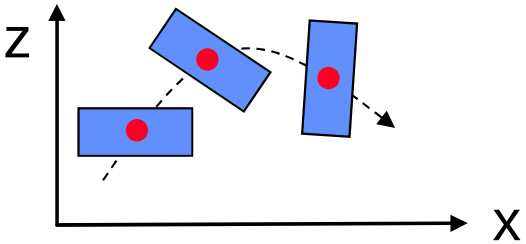
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation

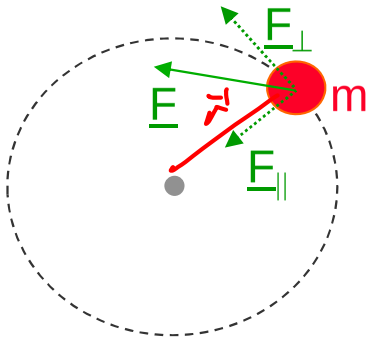
2.2.5 Rotation

Drehbewegung / Rotation: die Bewegung eines Massenpunktes mit konstantem Abstand zu einem beliebigen (aber bestimmten) Punkt im Raum.



2.2.5 Rotation

Analogie Drehbewegung (Rotation) und geradlinige Bewegung (Translation):



s Wegstrecke ⇔ θ Drehwinkel
v Geschwindigkeit ⇔ ω Winkelgeschwindigkeit
a Beschleunigung ⇔ $d\omega/dt$ Winkelbeschleunigung

---

m Masse ⇔ J Trägheitsmoment (oder I oder θ; *Beharrungsvermögen gegen Rotation*)
(Trägheit, Beharrungsvermögen gegen Translation)

$$\boxed{J = mr^2} \qquad \boxed{J = \int r^2 dm}$$

F Kraft *(Ursache einer Beschleunigung)* ⇔ **M** Drehmoment (oder T oder D; *Ursache einer Dreh-Beschleunigung*)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dot{\vec{p}} \qquad \boxed{\vec{M} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad \boxed{|M| = r \cdot F_\perp = r \cdot F \cdot \sin\Phi}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad \boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}} \qquad \boxed{|L| = r \cdot p_\perp}$$

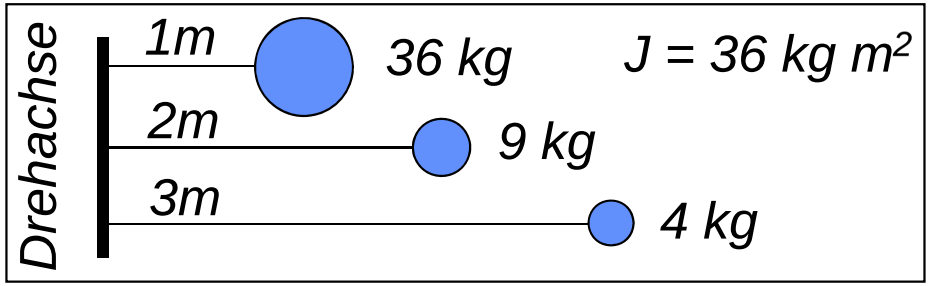
p Impuls ⇔ **L** Drehimpuls

2.2.5 Rotation: Trägheitsmoment

Betrachte Rotation um eine feste Drehachse (Translation separiert):

Das Beharrungsvermögen (die Trägheit) gegenüber einer Rotation wächst mit dem **Abstand r** zur Drehachse.

Trägheitsmoment J
für **einen Massepunkt:** $J = mr^2$



1) Ein Massepunkt ist über einen masselosen Stab an einer Drehachse befestigt und läuft mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn.

Erinnerung:
$v = \omega r$

Analogie: m ⇔ J, v ⇔ ω , ½ m v^2 ⇔ ½ J ω^2

➔ kinetische Energie E_{kin} = ½ m v^2 = ½ m $(\omega r)^2$ = ½ (mr^2) ω^2 = ½ J ω^2

➔ $J = mr^2$

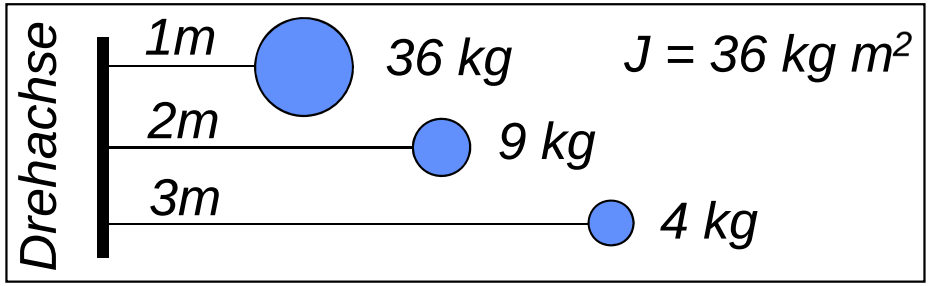
2) Rotation eines starren Körpers aus N Massepunkten (ω ist für alle gleich):

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} (m_i r_i^2) \omega^2 \Rightarrow J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

2.2.5 Rotation: Trägheitsmoment

Betrachte Rotation um eine feste Drehachse (Translation separiert):

Das Beharrungsvermögen (die Trägheit) gegenüber einer Rotation wächst mit dem **Abstand r** zur Drehachse.



Trägheitsmoment J
für **einen Massepunkt:** $J = mr^2$

Für **mehrere** Massepunkte m_i
an den Orten r_i:

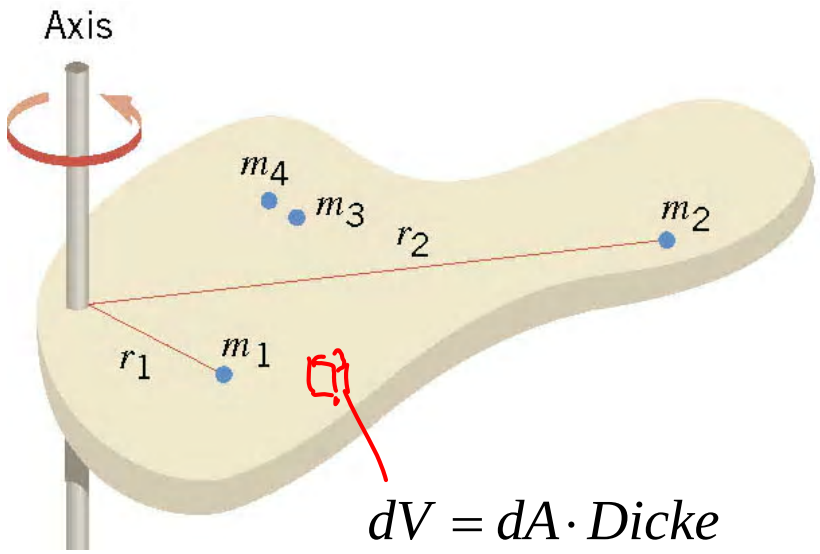
$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Für **ausgedehnten starren Körper:**

$$J = \int r^2 dm$$

Für homogene Körper
mit konstanter Dichte
$\rho = m/V = dm/dV$:

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \cdot dV$$

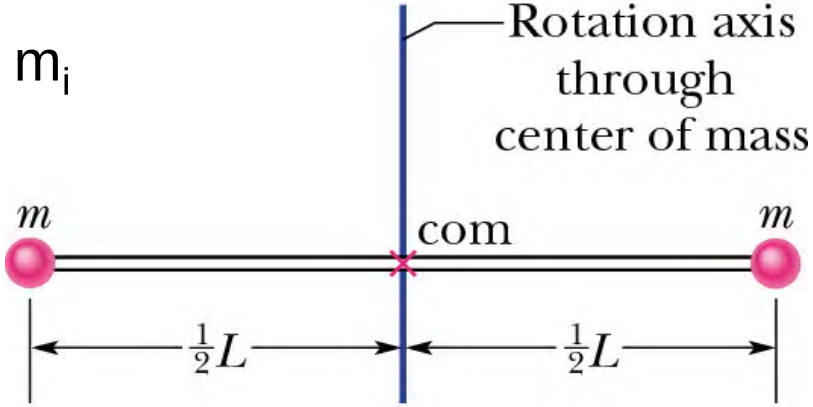


2.2.5 Rotation: Trägheitsmoment

Beispiel:

Trägheitsmoment für **mehrere** Massepunkte m_i an den Orten r_i:

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

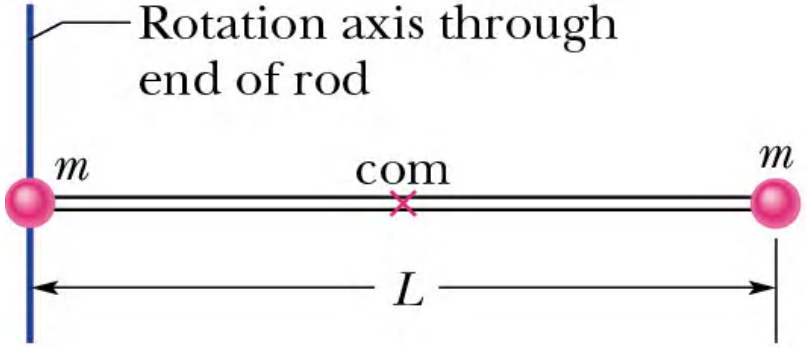


(a)

$$J = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow J = m\frac{L^2}{2}$$

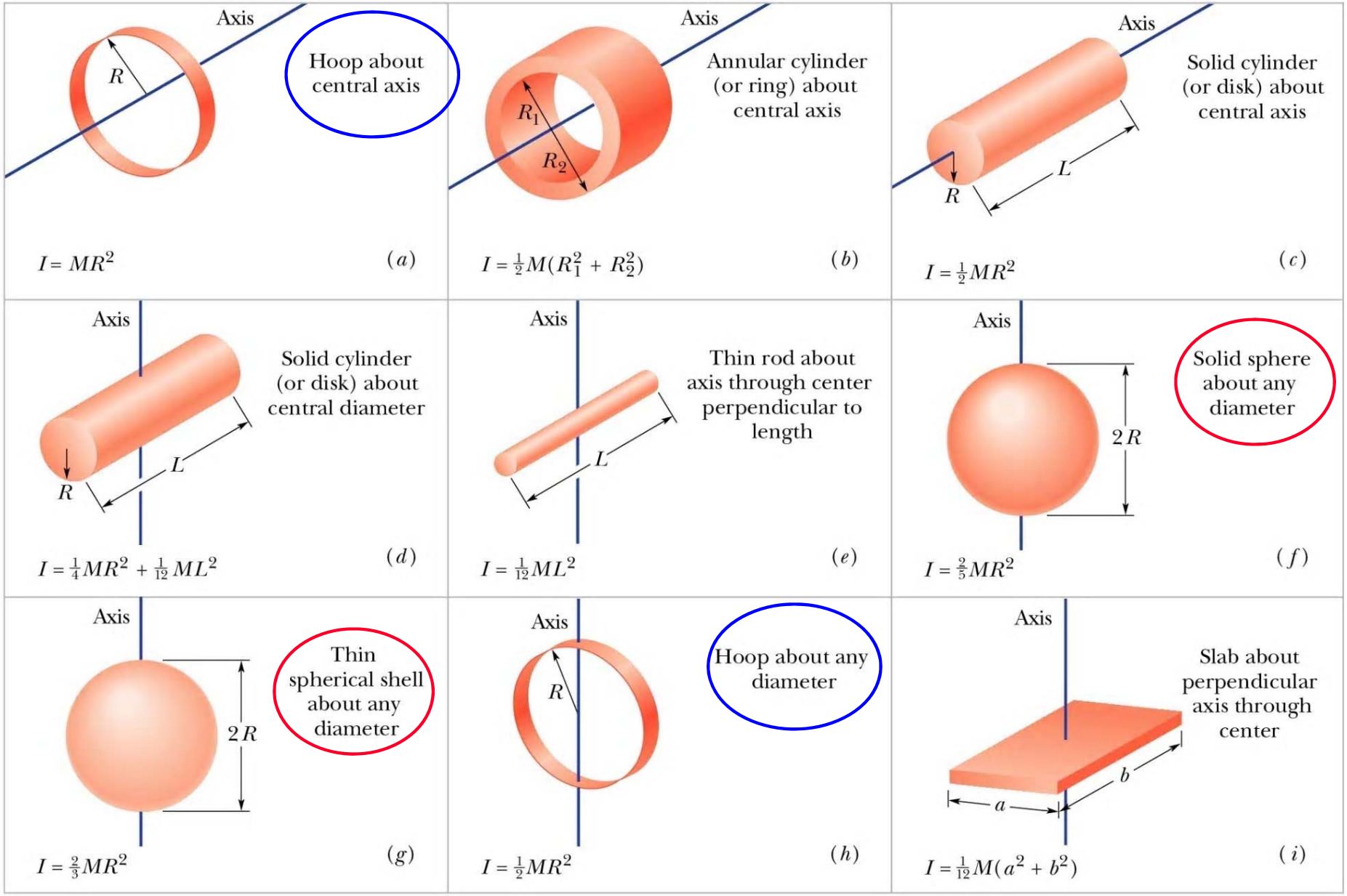
Trägheitsmoment gilt bzgl. einer **bestimmten Achse !**



$$J = mL^2 + 0$$

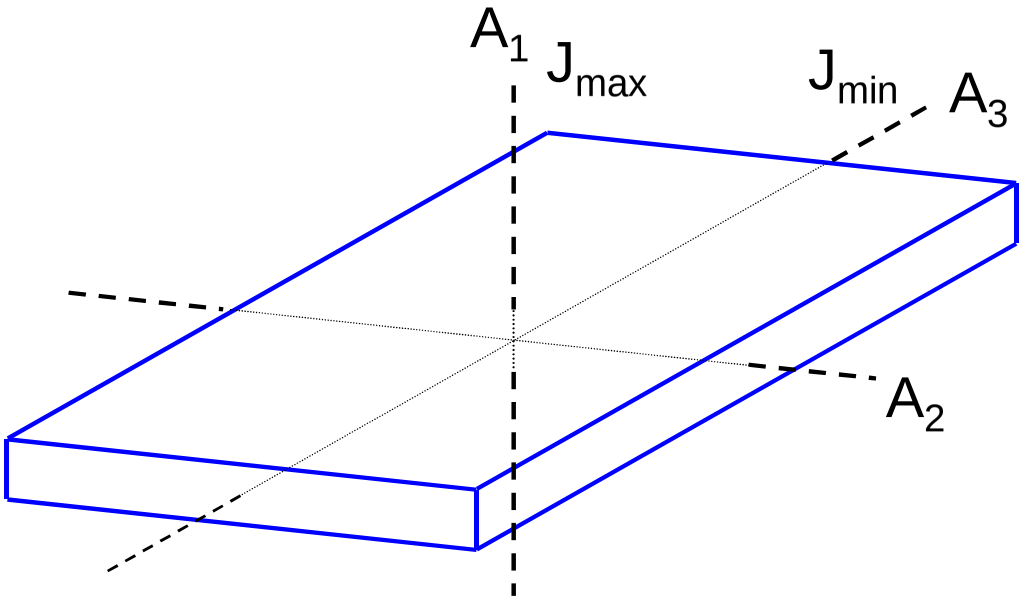
2.2.5 Rotation: Trägheitsmoment

Tabelle der wichtigsten Trägheitsmomente (bzgl. einer bestimmten Drehachse):



2.2.5 Rotation: Trägheitsmoment

Rotation um **freie Achsen**:



Im Koordinatensystem des rotierenden Körpers übt jedes Massenelement eine **Zentrifugalkraft** aus. Die Summe dieser Kräfte ist Null bei Drehung um eine **Symmetrieachse.**

$|\mathbf{F}_{fugal}| = m\omega^2 r$

➔ um diese **freien Achsen** kann sich ein Körper frei (ohne Lager) drehen.

Jeder Körper hat **drei freie Achsen** (**Hauptträgheitsachsen**).

Stabil ist die Rotation nur um die beiden Achsen mit **minimalem bzw. maximalem Trägheitsmoment** (hier: A_1 und A_3)

$$J_3 < J_2 < J_1$$

2.2.5 Rotation: Drehimpuls

Anschaulich ist der **Impuls p** gleich dem **„Schwung“** einer sich bewegenden Masse und der **Drehimpuls L** gleich dem **„Drall“**.

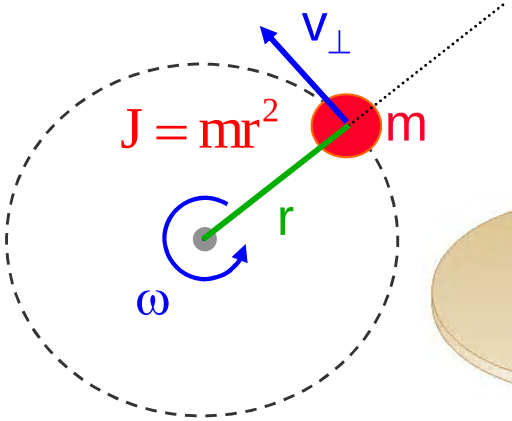
Analogie:
m ⇔ J, v ⇔ ω

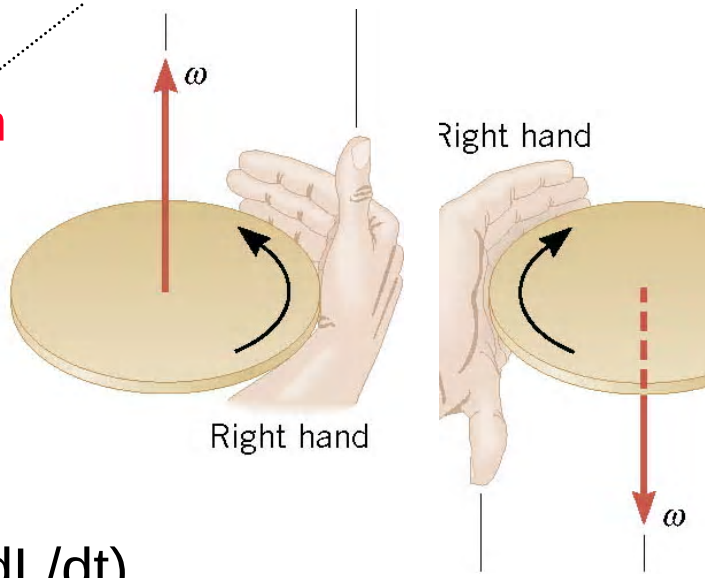
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Drehimpuls: $\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Einheit L:
1 kg m² / s
= 1 Nms

$$\boxed{|L| = r \cdot p_\perp}$$





1) Kräfte erzeugen Impulsänderungen ($\underline{F} = d\underline{p}/dt$),
Drehmomente erzeugen Drehimpulsänderungen ($\underline{M} = d\underline{L}/dt$)

2) $\underline{L}$ ist ein axialer Vektor ($\underline{\omega}$ auch), Richtung: **rechte-Hand-Regel**

3) Drehimpuls, Drehmoment & Trägheitsmoment beziehen sich auf eine bestimmte Drehachse

Drehimpulserhaltung

Der (Gesamt-)Drehimpuls ist im abgeschlossenen System (keine äußeren Drehmomente) eine Erhaltungsgröße (analog zu Energie und Impuls).

2.2.5 Rotation: Drehimpulserhaltung

Bsp.: **Drehimpulserhaltung**

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Trägheitsmoment J groß,
Kreisfrequenz ω klein

$L_1 = J_1 \cdot \omega_1$
$L_2 = J_2 \cdot \omega_2$ $\overset{!}{=}$

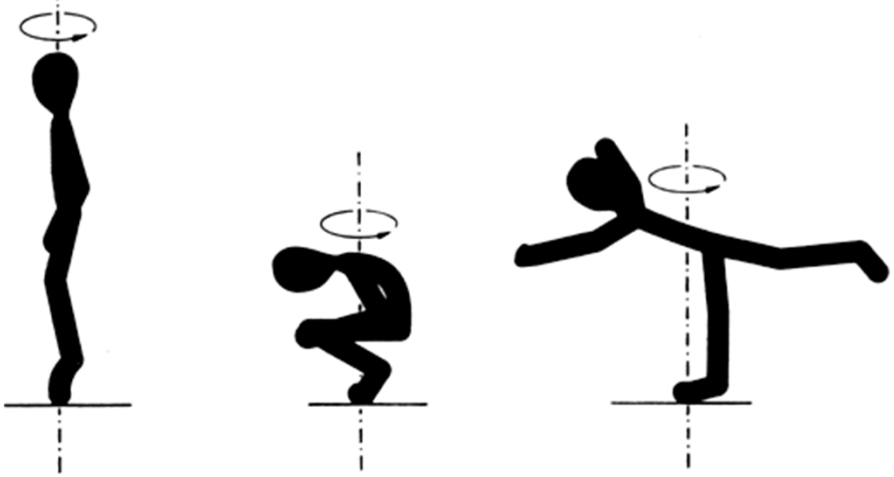
Drehimpuls: L = const

Trägheitsmoment J klein,
Kreisfrequenz ω groß

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} L\omega \qquad \textit{nicht} \qquad \textit{konst.!!}$$

Veränderung des Trägheitsmomentes



1,2 kg m² 2,3 kg m² 8 kg m²

2.2.5 Rotation: Drehmoment

Eine **Kraft F** ändert den **Impuls p** (bzw. die Geschw. v),
ein **Drehmoment M** ändert den **Drehimpuls L** (bzw. die Kreisfrequenz ω),
d.h. ein Drehmoment führt zu einer Dreh-Beschleunigung.

Drehimpuls L $\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}}$ $\boxed{\vec{M} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$ $\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

Drehmoment M

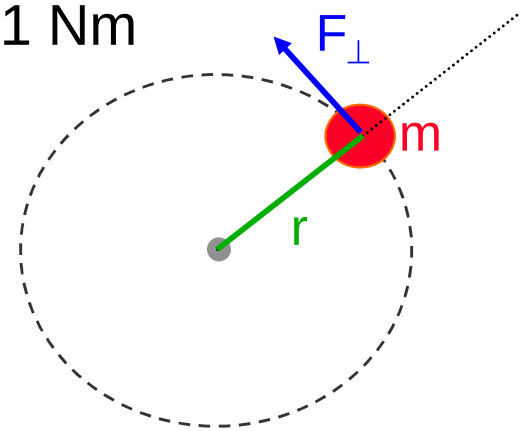
Einheit M: 1 kg m² / s² = 1 Nm

Analogie:
m ⇔ J, v ⇔ ω,
a=dv/dt ⇔ dω/dt

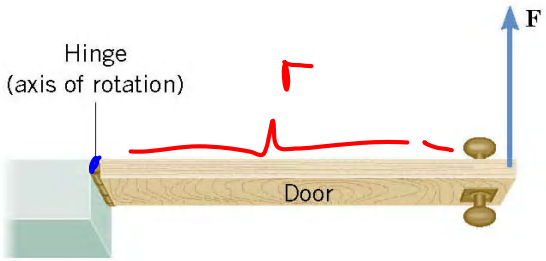
$\Updownarrow$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$\Updownarrow$ $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

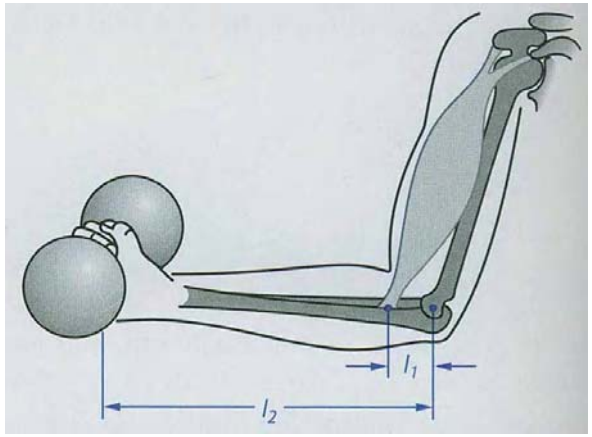
$\Updownarrow$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

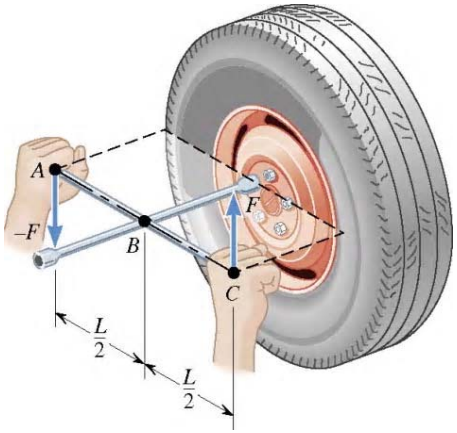


Beispiele für ein **Drehmoment M:**



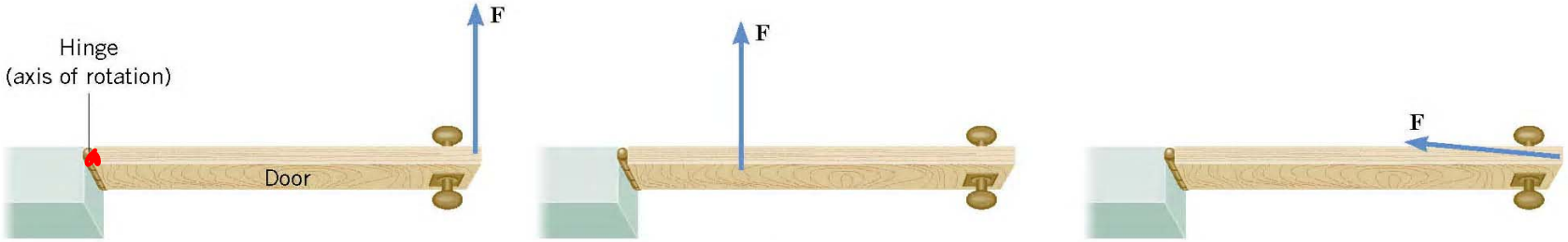
F_G

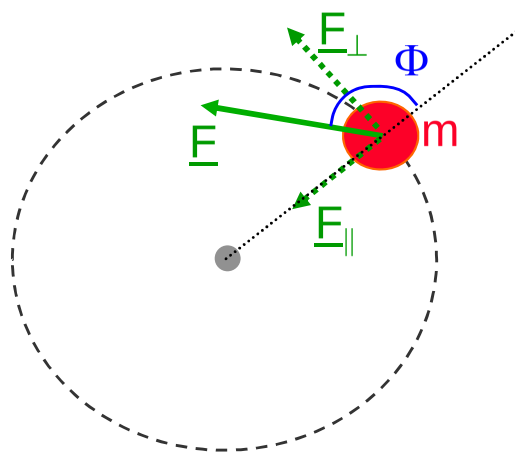




2.2.5 Rotation: Drehmoment

Wie hängen **Drehmoment M** und **Kraft F** zusammen ?

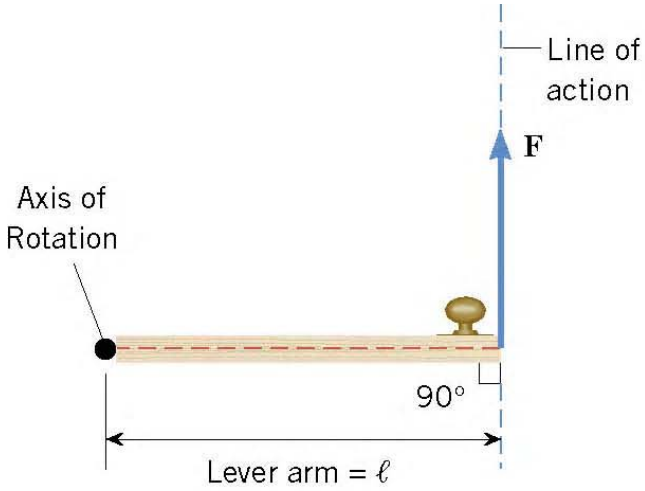


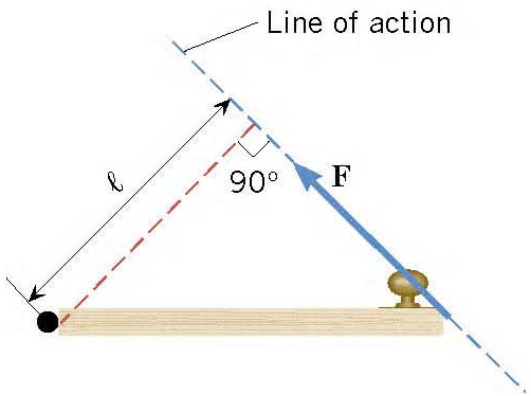


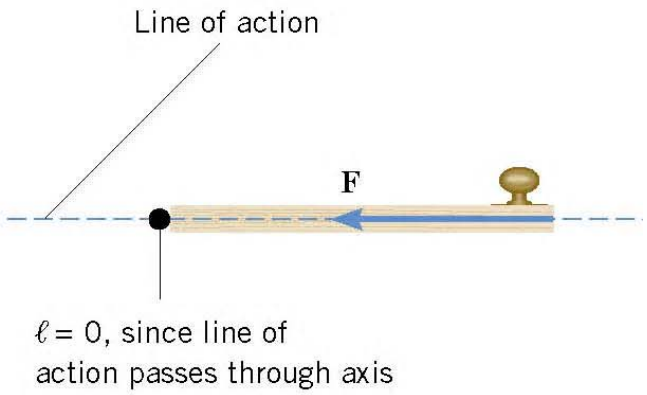
Drehmoment M wächst mit dem Hebelarm (Abstand r des Angriffs-punktes der Kraft F zur Drehachse)

„Kraft mal Hebelarm“

Nur Komponente $\mathbf{F}_{\perp}$ **senkrecht** zur Verbindungs-linie zur Drehachse zählt

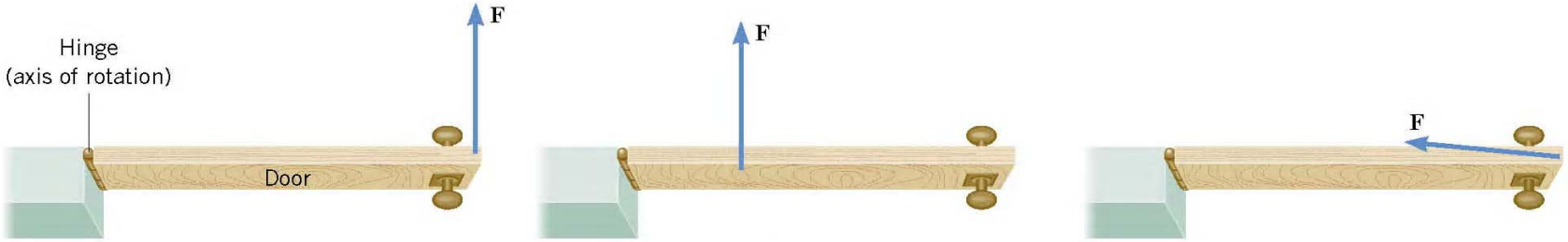


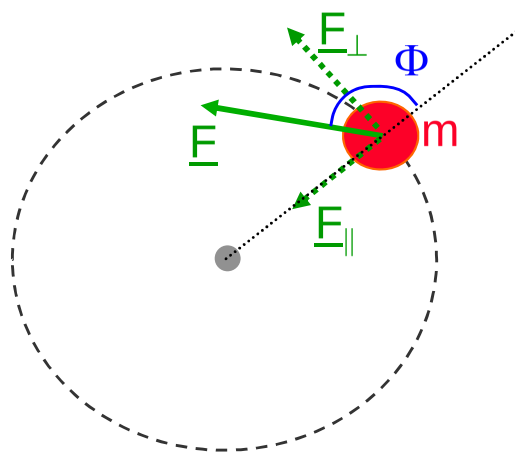




2.2.5 Rotation: Drehmoment

Wie hängen **Drehmoment M** und **Kraft F** zusammen ?





Drehmoment M wächst mit dem Hebelarm (Abstand r des Angriffspunktes der Kraft F zur Drehachse)

„Kraft mal Hebelarm“

Nur Komponente $\mathbf{F_\perp}$ **senkrecht** zur Verbindungslinie zur Drehachse zählt

$$\boxed{\begin{aligned}|M| &= r \cdot F_\perp \\ &= r \cdot F \cdot \sin\Phi\end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

hier ist $\underline{M}$ || zur Drehachse;

Richtung: rechte-Hand-Regel

$\mathbf{F_\parallel}$: $\underline{F}$ || $\underline{r}$ bzw. $\underline{F} \perp \underline{v}$, **gleichförmige** Kreisbewegung

➔ ω **= const**, nur Richtung von $\underline{v}$ ändert sich (vgl. Kap. 2.1)

$\mathbf{F_\perp}$: $\underline{F} \perp \underline{r}$ bzw. $\underline{F}$ || $\underline{v}$, **beschleunigte** Kreisbewegung

➔ $\mathbf{d\omega/dt \neq 0}$, Betrag von $\underline{v}$ ändert sich

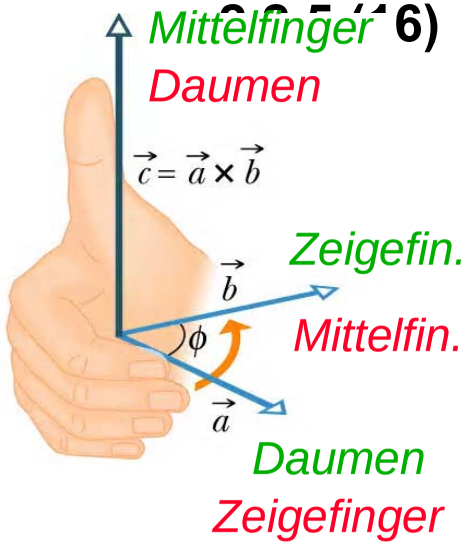
➔ nur $F_\perp$ erzeugt ein Drehmoment

2.2.5 Rotation: Drehmoment

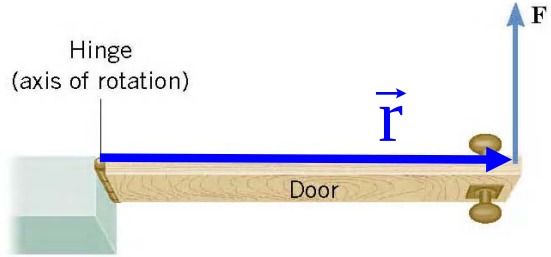
Richtung des **Drehmoments M**

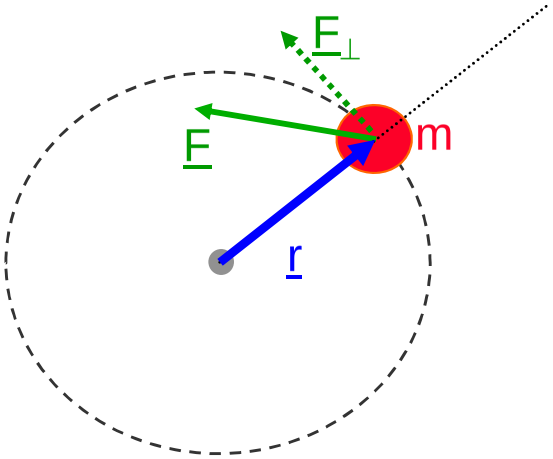
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Richtung:
rechte-Hand-Regel

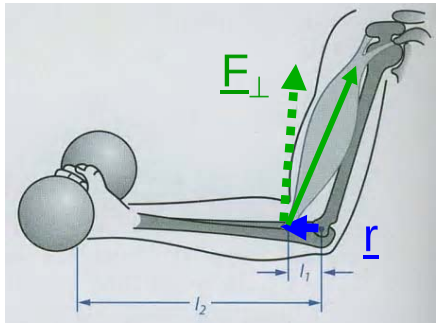


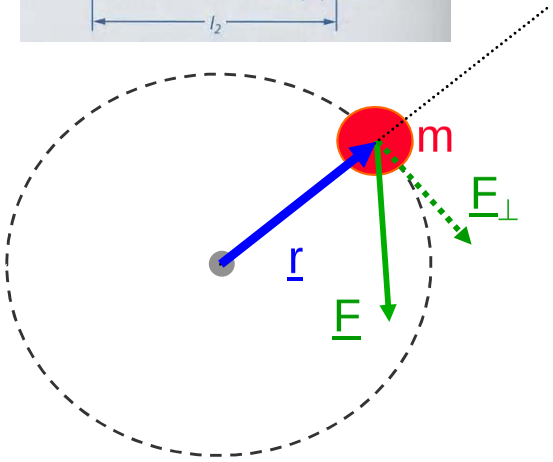
M zeigt aus der Zeichenebene heraus („nach oben“), Drehung **gegen** Uhrzeigersinn





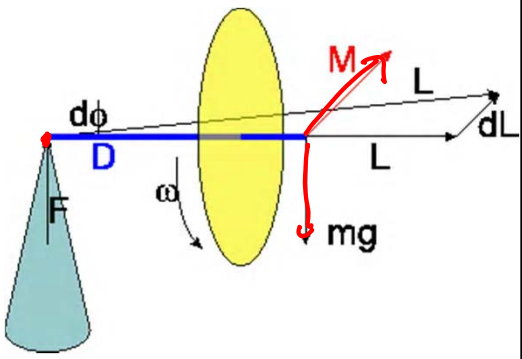
M zeigt in die Zeichenebene hinein („nach unten“), Drehung **mit** dem Uhrzeigersinn





hier: $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ (anti-)parallel zum Drehimpuls $\vec{L}$

➔ Änderung des **Betrags** von $\vec{L}$

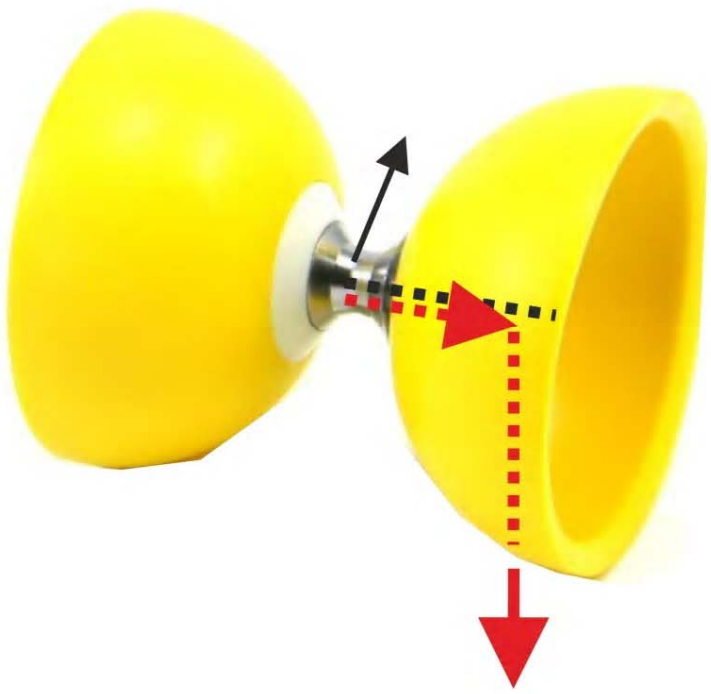


Für $\vec{M} = d\vec{L}/dt \perp \vec{L}$

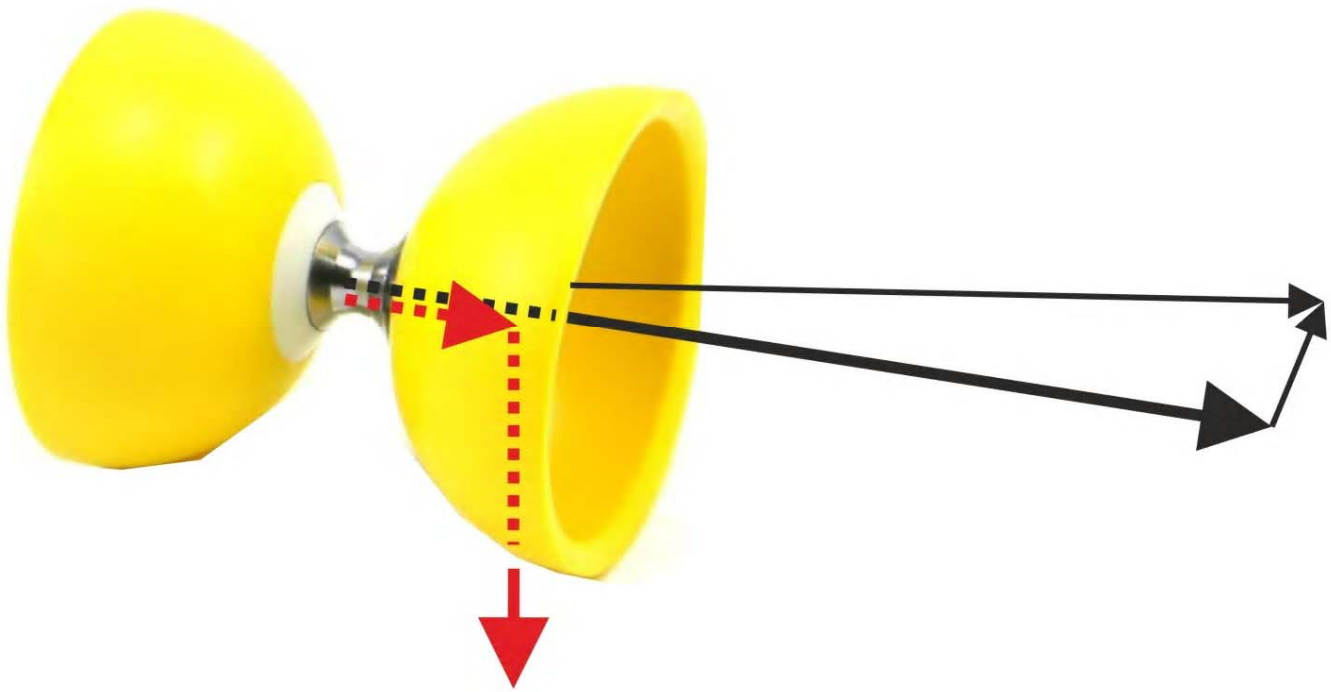
➔ Änderung der **Richtung** von $\vec{L}$

➔ **Präzession**

2.2.5. Die Physik des Diabolos



2.2.5. Die Physik des Diabolos



2.2.5 Rotation: Drehimpulserhaltung

Bsp.: **Fahrrad fahren**

Drehimpulserhaltung erhöht die Stabilität des Fahrrades.

Je größer der Drehimpuls, desto stabiler läuft das Rad.

Drehimpuls $\mathbf{L} = J\,\omega = m\,r^2\,\omega = \mathbf{m\,r\,v}$

Ein Rad läuft umso stabiler

je schwerer die Felge, je größer der Felgenradius, je schneller man fährt.

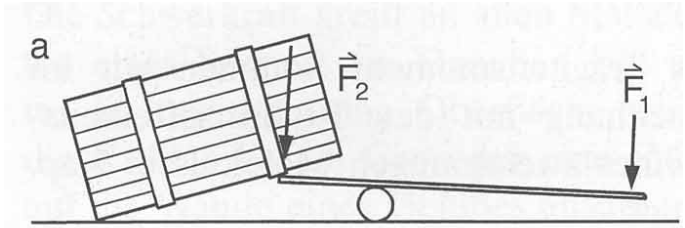
2.2.5 Rotation: Hebel

Hebelgesetz: Am **Hebel** herrscht **Gleichgewicht**, wenn sich die angreifenden Drehmomente vektoriell zu Null addieren:

$$\boxed{\vec{M}_{ges} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0}$$

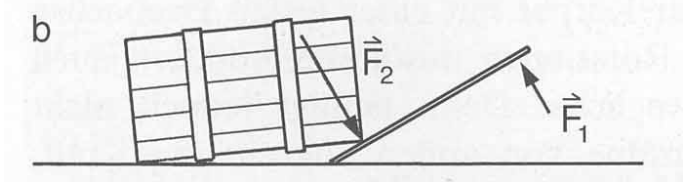
oder $$\boxed{F_1 \cdot r_1 \cdot \sin\Phi_1 = F_2 \cdot r_2 \cdot \sin\Phi_2}$$

Kraft x Kraftarm = Last x Lastarm



zweiarmiger Hebel

einarmiger Hebel



$$\Phi_1 = \Phi_2 = \pi/2 \quad (90°)$$

$$\Rightarrow F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$\Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} > F_1$$

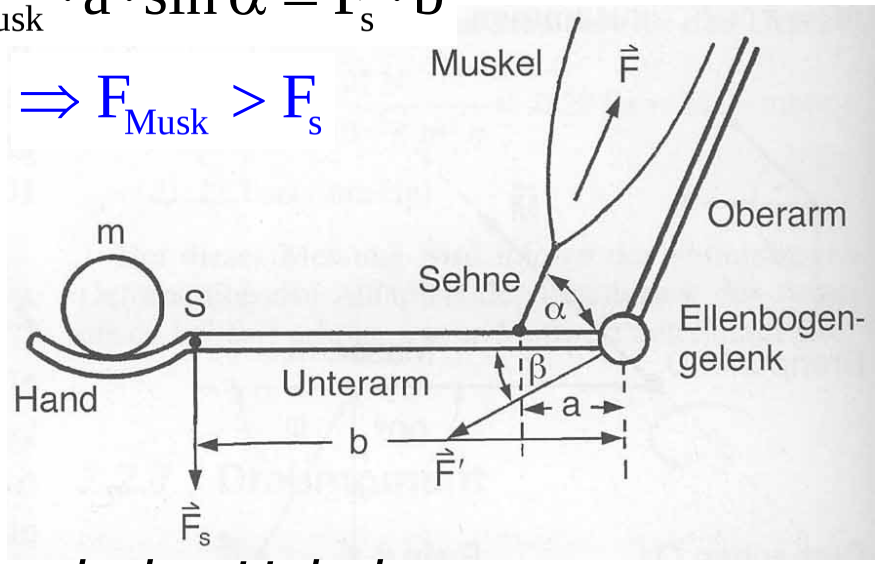
Das Heben der Last wird um das Verhältnis der Hebelarme erleichtert

Bsp.: Skelett-Mechanik

Gewichtskraft F_s greift im Schwerpunkt S an, der Bizeps greift näher am Gelenk an:

$$F_{Musk} \cdot a \cdot \sin\alpha = F_s \cdot b$$

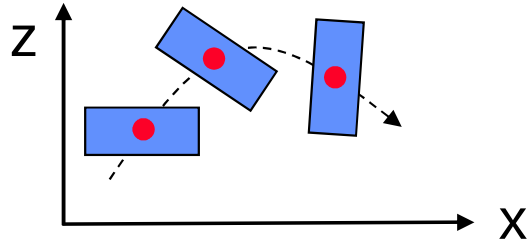
$$\Rightarrow F_{Musk} > F_s$$



Durch den Hebelarm (a << b) muss der Muskel mehr als nur die Gewichtskraft aufbringen.

2.2.5 Rotation: Schwerpunkt

Erinnerung:
jede Bewegung eines starren Körpers lässt sich trennen in die **Translation** eines Massenpunktes (des **Schwerpunktes**) und eine **Rotation**.



An jedem Massenelement eines starren Körpers greift die Gewichtskraft an.

Am **Schwerpunkt S** ist die Summe der resultierenden Drehmomente gleich Null.

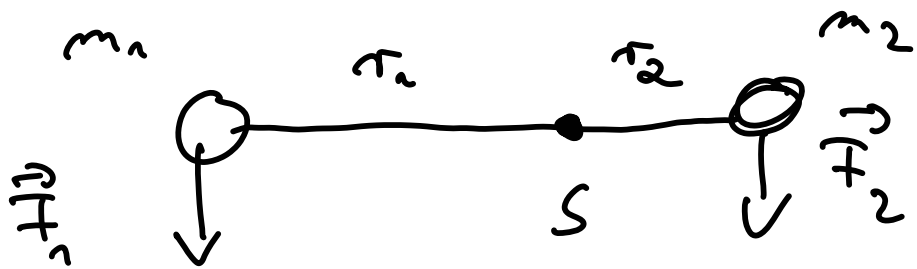
$$\vec{M}_{ges} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

➔ ein am Schwerpunkt aufgehängter Körper erfährt durch die Gewichtskraft **keine Drehbeschleunigung**. *(analog zu 1. Newtonschem Axiom: $F_{ges}=0 \Leftrightarrow a = 0$)*

2.2.5 Rotation: Schwerpunkt

Definition des Schwerpunkts

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m_{ges}}$$



$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_1 m_1 g + r_2 m_2 g = 0$$

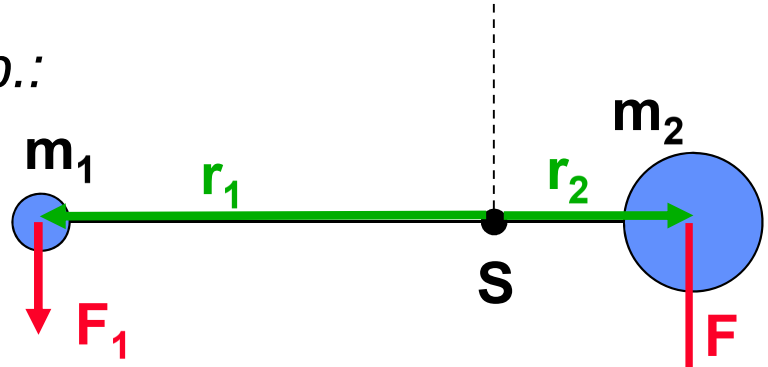
$$\Leftrightarrow r_1 m_1 = - r_2 m_2$$

$$r_S = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow m_1 r_1 = - m_2 r_2$$

2.2.5 Rotation: Schwerpunkt

Bsp.:



$$r_1 \cdot m_1 g = r_2 \cdot m_2 g \quad \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

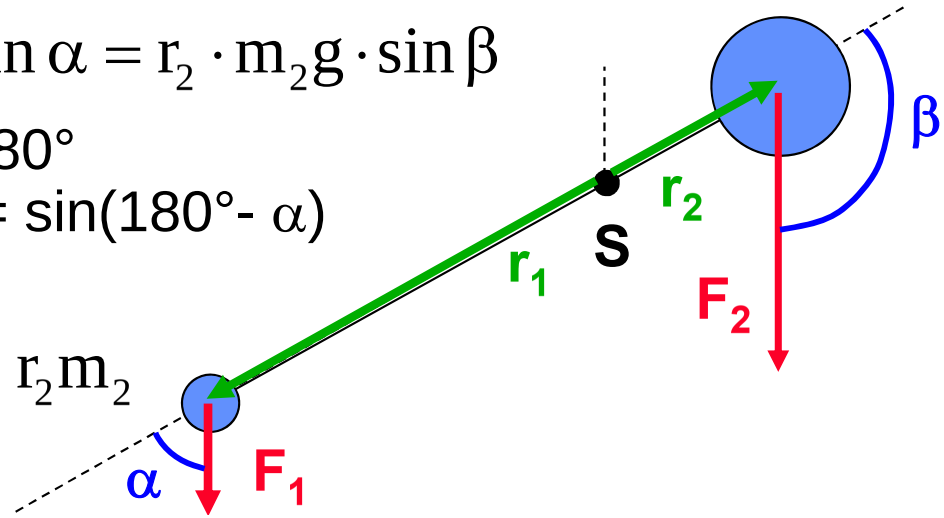
$$r_1 \cdot m_1 g \cdot \sin\alpha = r_2 \cdot m_2 g \cdot \sin\beta$$

$\alpha + \beta = 180°$

➔ $\sin\beta = \sin(180° - \alpha)$

$= \sin\alpha$

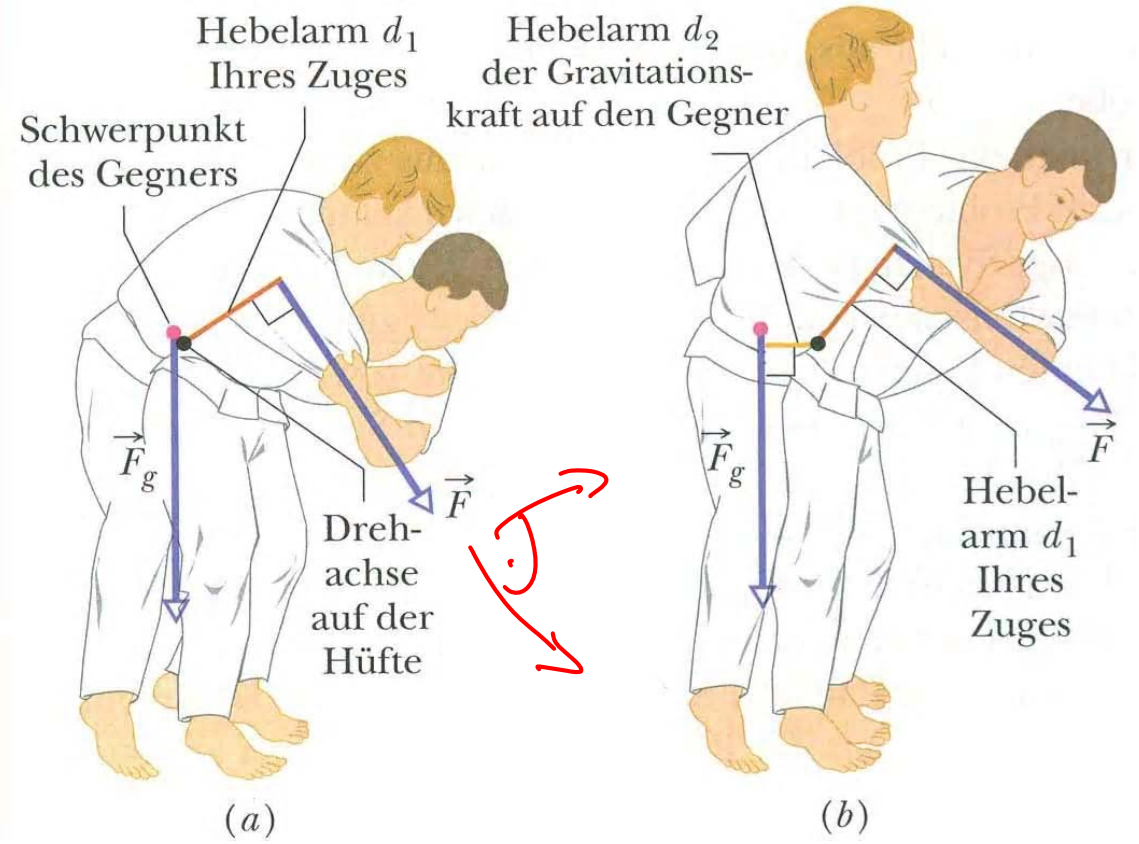
$$\Rightarrow r_1 m_1 = r_2 m_2$$



2.2.5 Rotation: Hebel, Schwerpunkt

Bsp.:

Der Wurf gelingt leichter, wenn Sie wie in (a) den Schwerpunkt Ihres Gegners auf die Drehachse (die Hüfte) ziehen. So erzeugt seine Gewichtskraft **kein Drehmoment** bzgl. der Drehachse.



2.2.5 Rotation: Zusammenfassung

Kräfte sind die Ursache von **Impulsänderungen**;
Drehmomente sind Ursache von **Drehimpulsänderungen**.
Anschaulich ist der **Impuls p** der **Schwung** und der **Drehimpuls L** der **Drall**.

Im abgeschlossenen System sind Impuls und Drehimpuls **erhalten**.

Viele Formeln für die Rotation lassen sich per Analogie zur Translation ableiten,
$m \Leftrightarrow J$, $v \Leftrightarrow \omega$, $a=dv/dt \Leftrightarrow d\omega/dt$, $p \Leftrightarrow L$, $F \Leftrightarrow M$,
Bsp.: $p = m\,v \Leftrightarrow L = J\,\omega$; $F = m\,a \Leftrightarrow M = J\,d\omega/dt$; $F = dp/dt \Leftrightarrow M = dL/dt$

Die Größen der Drehbewegung beziehen sich auf eine bestimmte Drehachse.

Trägheitsmoment: $\boxed{J = mr^2}$ Drehmoment: $\boxed{\vec{M} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$ Drehimpuls: $\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}}$

$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$ $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Rotationsenergie: $E = \frac{1}{2} J \omega^2$ $\boxed{\vec{M} = d\vec{L} / dt}$

Analogie: Translations- ⇔ Rotationsbewegung

Strecke	**s**	θ	Winkel
Geschw.	$\mathbf{v}=d\mathbf{s}/dt$	$\omega=d\theta/dt$	Winkelgeschw.
Beschleunigung	$\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$	$d\omega/dt$	Winkel-Beschl.
Impuls	$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = J\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	Drehimpuls
träge Masse	m	$J=mr^2 = \int_{Vol.} r^2\rho dV$	Trägheits-moment
kinet. Energie	$\frac{1}{2}\, mv^2=p^2/(2m)$	$\frac{1}{2}\, J\, \omega^2=L^2/(2J)$	Rotations-energie
Kraft	$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt$	$\mathbf{M}= J\, d\omega/dt = d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	Drehmoment

- Fett gedruckt sind vektorielle Größen, normal gedruckt sind skalare Größen, θ ist zB. die Länge von $\boldsymbol{\theta}$!
- $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\theta}$ und **L** sind axiale Vektoren
- $\boldsymbol{\theta}$ entspricht der Drehung um den Winkel θ um die Achse parallel zu $\boldsymbol{\theta}$