Fachtutorium

Notiztitel 23.10.2014

Di	$13^{00} - 14^{30}$	30
Mi	$13^{00} - 14^{30}$	30
Do	$13^{00} - 14^{30}$	

2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation

2.2.1 Kräfte: Reibung

Ursachen der Reibung: Oberflächenrauigkeit und Adhäsion

Anziehung zw. Molekülen der benachbarten Stoffe (elektromagnetische WW); nur lokale Kontakte wegen Rauigkeit der Oberflächen

1) zw. ruhenden Körpern :

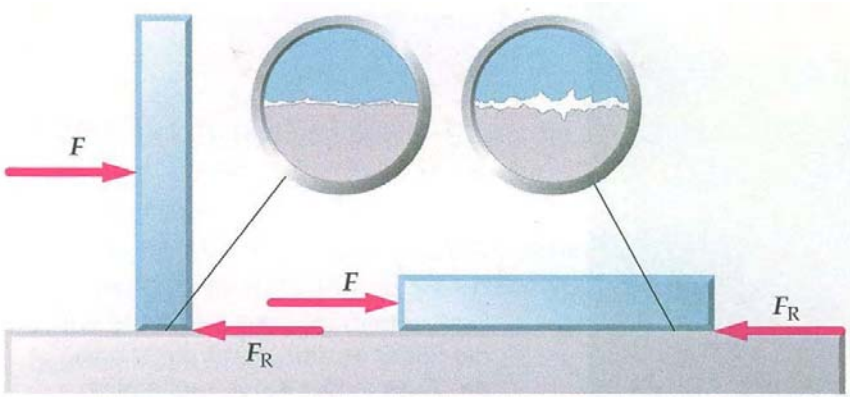
Haftreibung (Haftreibungskraft proportional Normalkraft: $|\underline{F}_{HR}^{max}| \propto |\underline{F}_N|$)

relevant beim Gehen, Rad fahren, …

(probieren Sie es auf einer Eisfläche)

ohne Reibung kein Kraftübertrag || Oberfläche

Mikroskopische Berührungsfläche ist proportional zur Normalkraft



2) zw. bewegten Körpern:

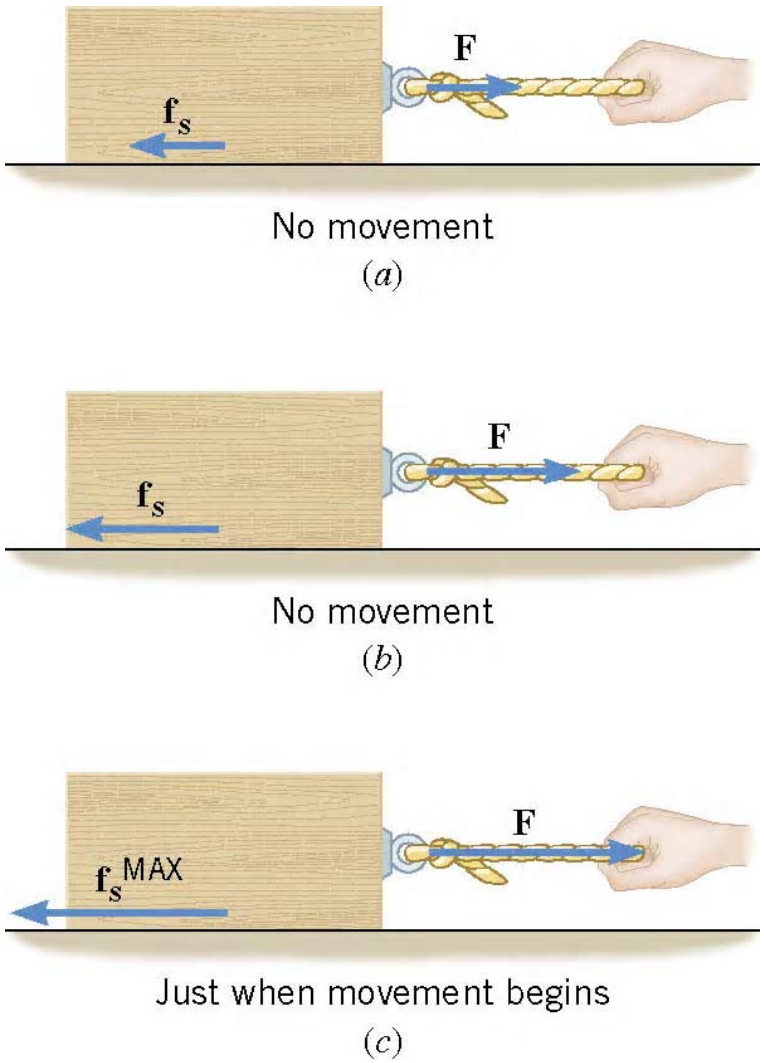
a) **Gleitreibung** (kleiner als Haftreibung; auch proportional zur Normalkraft)

b) **Rollreibung** (kleiner als Gleitreibung)

c) Bewegung eines Körpers in **Flüssigkeiten & Gasen:** Reibung proportional zur Viskosität und zur Relativ-Geschwindigkeit (für kleine Geschwindigkeit)

2.2.1 Kräfte: Reibung

Haftreibung



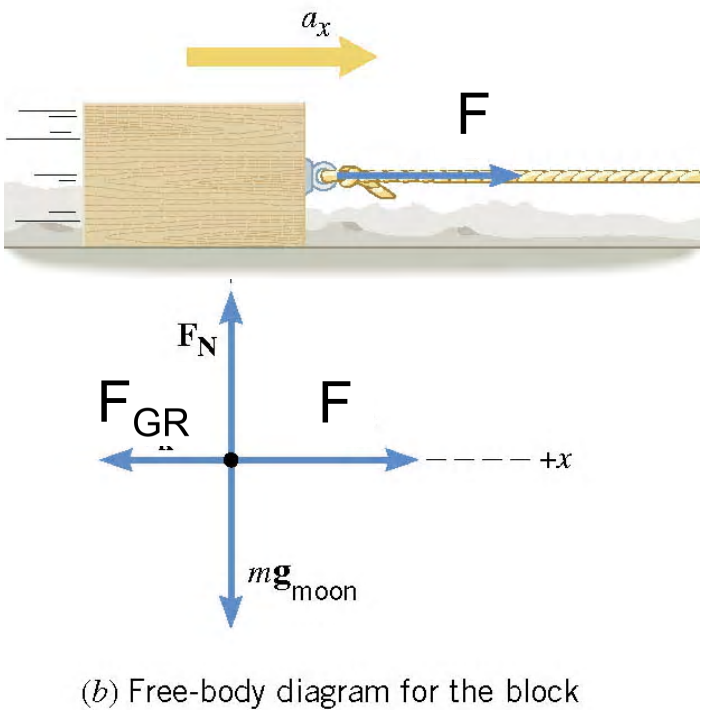
Experiment

Haftreibungskraft F_{HR} proportional zur angreifenden Kraft F (für $F \leq F_{HR}^{max}$)

Der maximale Wert der Haftreibungskraft ist proportional zur Normalkraft:

$$|\underline{F}_{HR}^{max}| = \mu_{HR} \, |\underline{F}_N|$$

Gleitreibung



(b) Free-body diagram for the block

v = const. falls angreifende Kraft $\underline{F} = -\underline{F}_{GR}$,

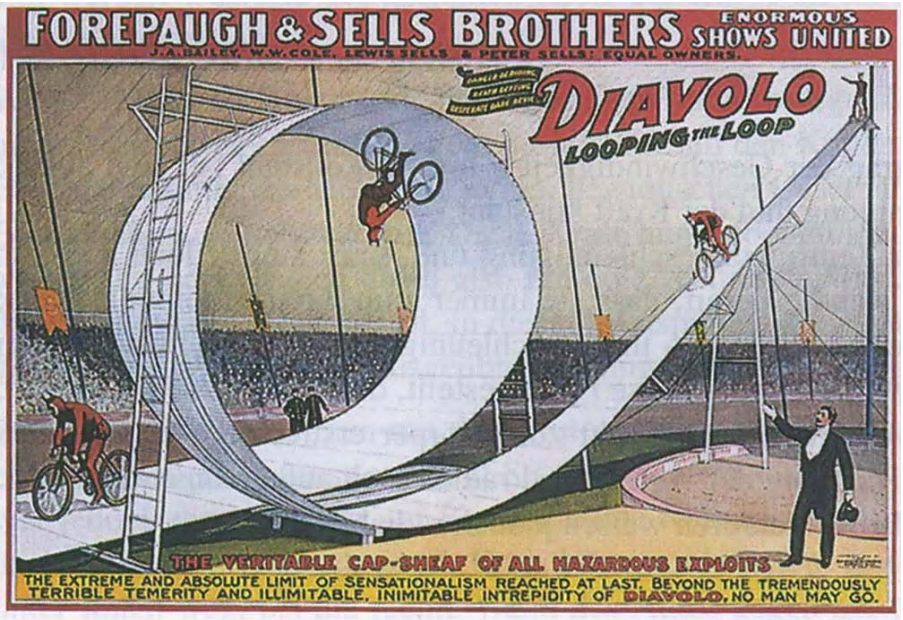
und $|\underline{F}_{GR}| = \mu_{GR} \, |\underline{F}_N|$

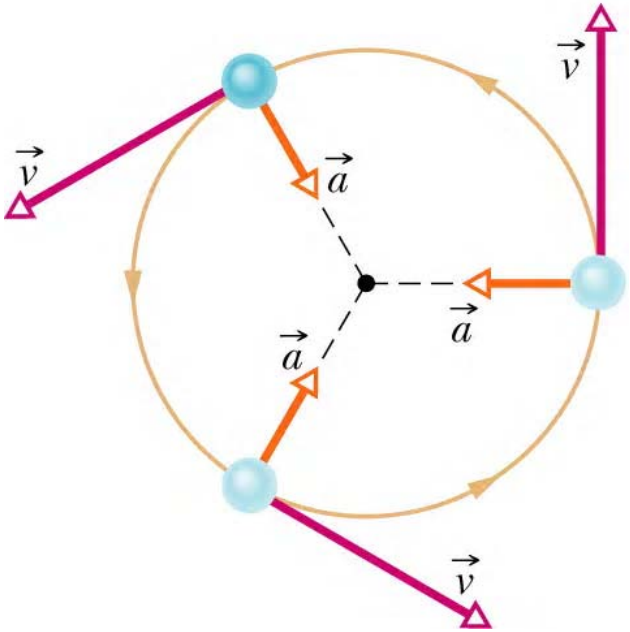
2.2.1 Kräfte: Kreisbewegung

Bsp.: Kreisbewegung

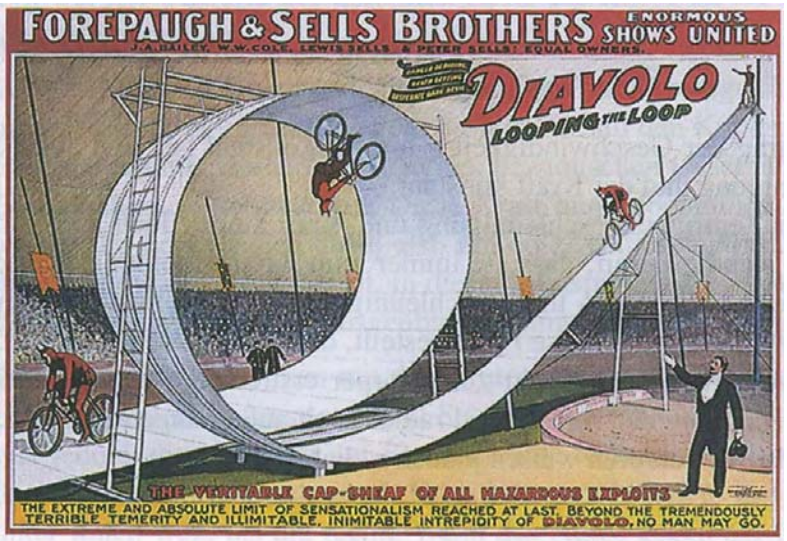
Um einen Körper der Masse m auf eine Kreisbahn mit Radius R zu zwingen, muss die Zentripetalkraft F_z aufgebracht werden. Diese ist zum Kreismittelpunkt gerichtet.

$$|\underline{F}_z| = m\, a_z = m\, v^2 / R = m\, \omega^2 R \quad (a_z \text{ s. Kap. 2.1})$$





2.2.1 Kräfte: Kreisbewegung



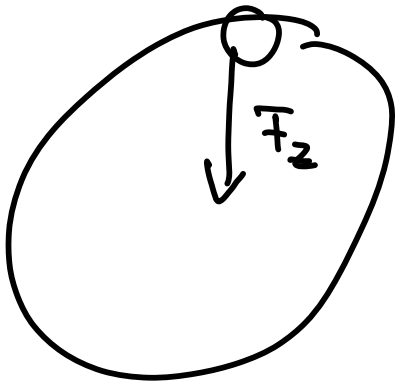
$|\underline{F}_z| = m\, a_z = m\, v^2 / R = m\, \omega^2 R$ *(a_z s. Kap. 2.1)*

Frage:

Wie schnell muss der Radfahrer am Scheitelpunkt des Loopings sein, damit er mit der Bahn in Kontakt bleibt?

Normalkraft

$$\vec{F}_z = \vec{F}_g + \vec{F}_N = 0$$



$$\Leftrightarrow \vec{F}_z = \vec{F}_g$$

$$\Leftrightarrow \frac{m v^2}{R} = m \cdot g$$

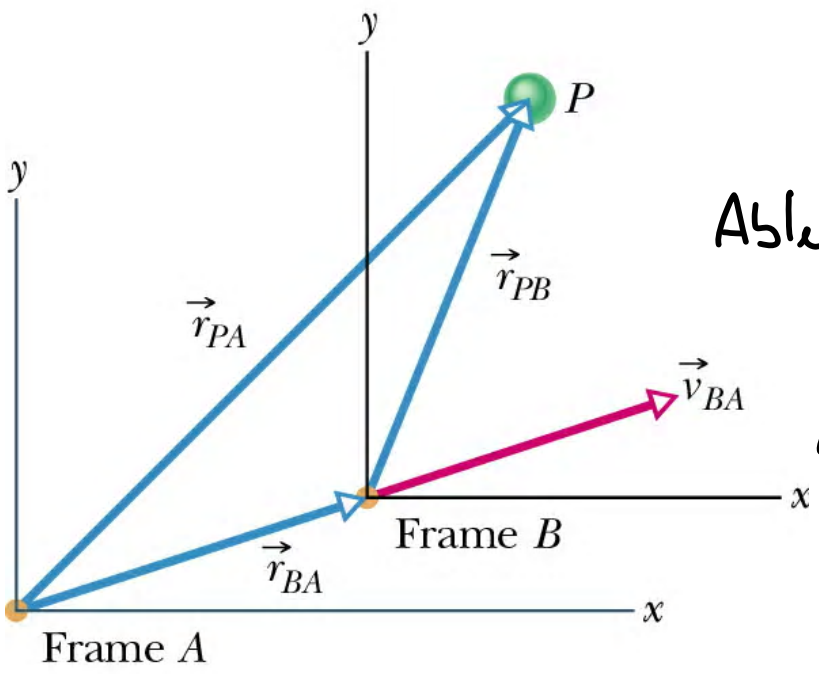
$$\Leftrightarrow v^2 = g \cdot R \Rightarrow v = \sqrt{gR}$$

2.2.1 Kräfte: Inertialsysteme

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem die newtonschen Axiome gelten.

In einem Inertialsystem ist der Raum homogen & isotrop und die Zeit homogen.

Beschleunigte Bezugssysteme sind **keine** Inertialsysteme.



$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

Ableitung: $\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$ $\quad \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = 0$

Ableitung: $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$

$\vec{v}_{BA} = \text{const}$

2.2.1 Kräfte: Inertialsysteme

Ein **Inertialsystem** ist ein Bezugssystem, in dem die newtonschen Axiome gelten.

In einem Inertialsystem ist der Raum homogen & isotrop und die Zeit homogen.

Beschleunigte Bezugssysteme sind **keine** Inertialsysteme.

(1) Beobachter in **verschiedenen Bezugsystemen**, die **relativ zueinander nicht beschleunigt** werden, messen für ein sich bewegendes Teilchen die **gleiche Beschleunigung** und damit auch die **gleichen Kräfte**.

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')dt'}$$

Addition der Geschwindigkeiten, nur $v(t_0)$, ist unterschiedlich, nicht aber a(t).

(2) In **relativ zueinander beschleunigten Bezugssystemen** werden **unterschiedliche Beschleunigungen** und damit auch **unterschiedliche Kräfte** gemessen ➔ **Scheinkräfte**

2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte

Scheinkräfte (Trägheitskräfte) treten nur in **beschleunigten Bezugssystemen** auf.

Sie werden **nicht** von anderen Körpern ausgeübt.

Beschreibung der Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen:

- für einen äußeren **(nicht-beschleunigten) Beobachter** einfach
- ein innerer **(mitbeschleunigter) Beobachter muss Scheinkräfte einführen**

Bsp. 1: **Abbremsen** eines fahrenden Autos:

Sichtweise im Inertialsystem:
Vom **ruhenden Beobachter** aus wirkt auf die Insassen keine Kraft, und ein frei beweglicher Körper folgt **ohne Krafteinwirkung** dem 1. Newtonschen Axiom ...

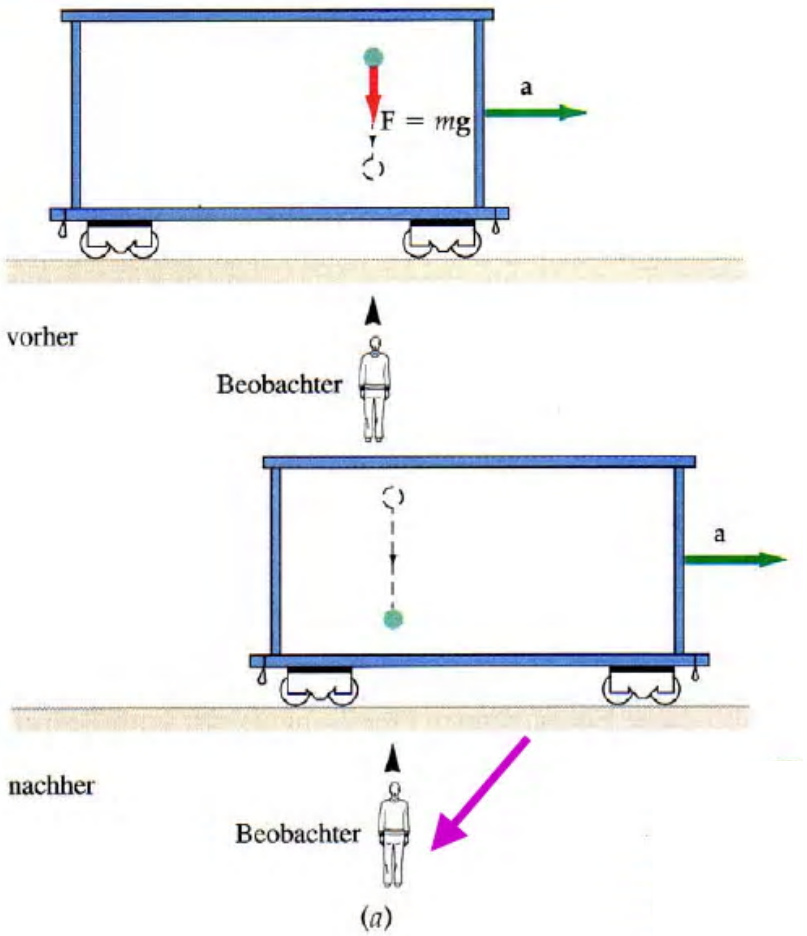
Sichtweise im beschleunigten System:
Vom **mitbeschleunigten (abgebremsten) Beobachter** (im Auto) aus :
Insassen werden durch die **Trägheitskraft beschleunigt**.
Diese ist eine **Scheinkraft**.

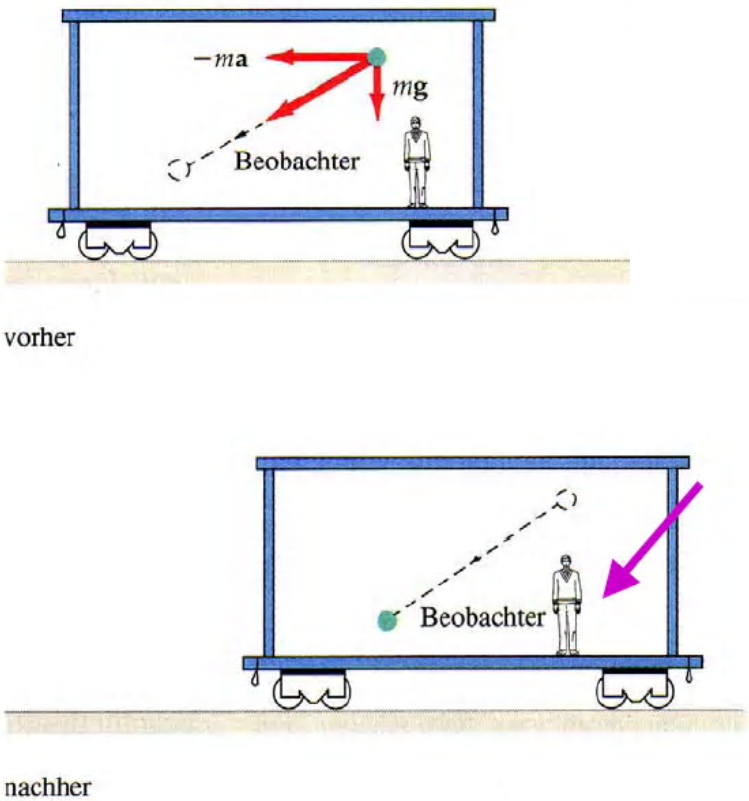
2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Trägheitskraft

Bsp. 2: Zug wird aus dem Stand beschleunigt; im Zug fällt ein Ball
(der Fall beginnt noch im stehenden Zug)

Vom **ruhenden Beobachter** aus fällt der Ball geradlinig nach unten.

Vom **mitbeschleunigten Beobachter** aus wird der Ball nach hinten beschleunigt, was er durch eine **Scheinkraft (Trägheitskraft)** erklärt.

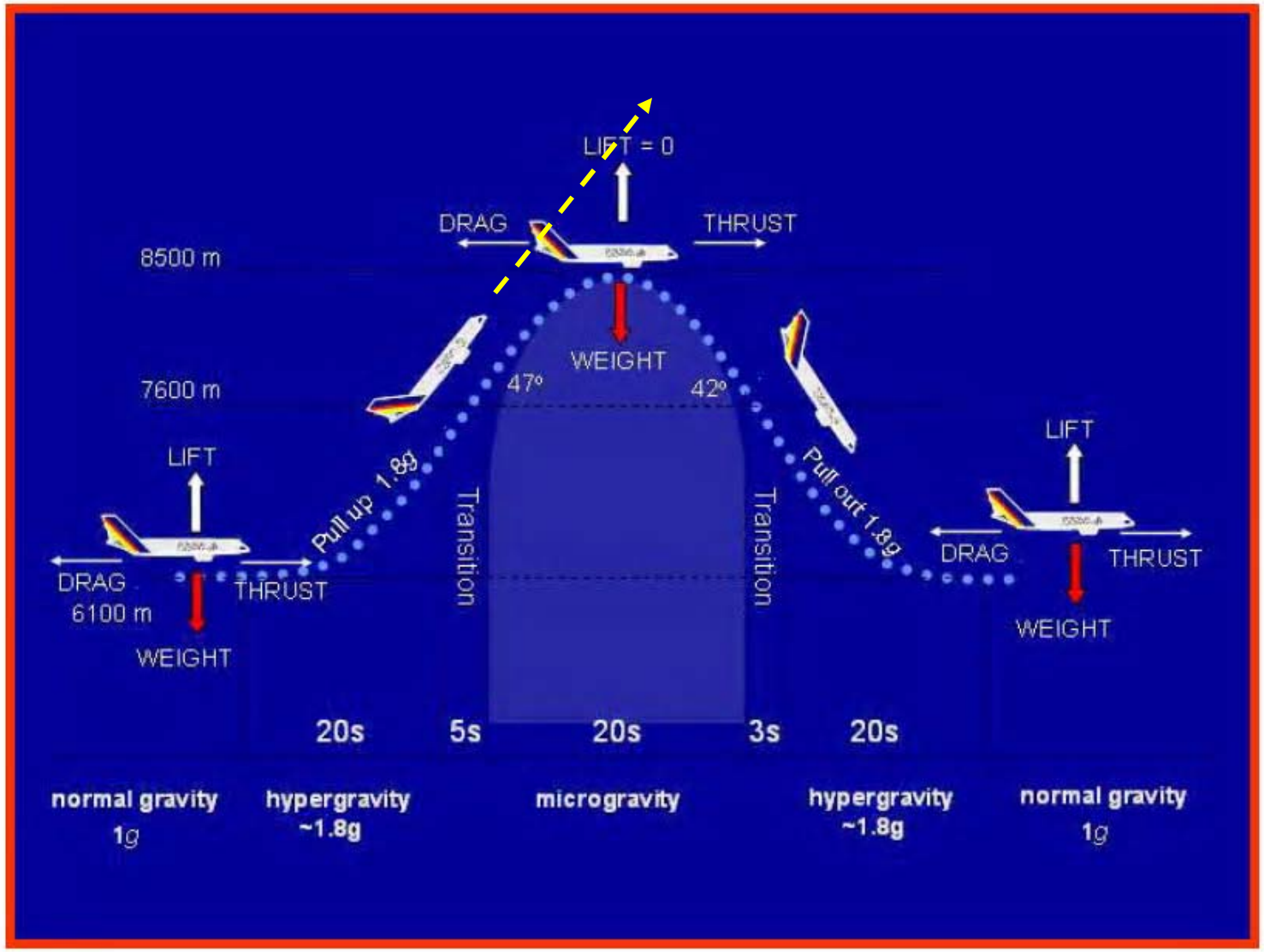




2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Trägheitskraft

Bsp. 3: Schwerelosigkeit im Parabelflug („zero-g“ Experimente)

Für den **mitbeschleunigten Beobachter** **kompensieren** sich während des Parabelflugs gerade die Schwerkraft und die Trägheitskraft.



2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Trägheitskraft

Bsp. 3: Schwerelosigkeit im Parabelflug („zero-g“ Experimente)

ESA student campaign

2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Zentrifugalkraft

Bsp. 4: **Zentrifugalkraft**

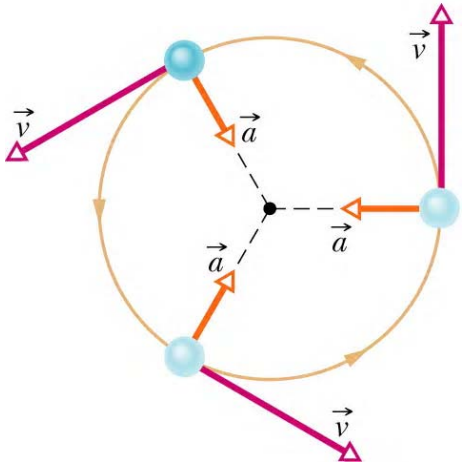
(Trägheitskraft auf einen Körper, der im **rotierenden Bezugssystem ruht**)

Kreisbewegung

Um einen Körper der Masse m auf eine Kreisbahn mit Radius r zu zwingen, muss die

Zentripetalkraft $\underline{F_z} = m\,\underline{a} = -\,m\,\omega^2\,\underline{r}$

aufgebracht werden. Diese ist zum Kreismittelpunkt gerichtet.



Ruhender Beobachter:

Kette bringt Zentripetalkraft auf

$\underline{F_z} = -\,m\,\omega^2\,\underline{r}$

Sichtweise im beschleunigten System:

Passagier spürt **Zentrifugalkraft (Scheinkraft)**

$\underline{F_{ZF}} = +\,m\,\omega^2\,\underline{r}$

2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Zentrifugalkraft

Bsp. 4: **Zentrifugalkraft**

(Trägheitskraft auf einen Körper, der im **rotierenden Bezugssystem ruht**)

(Ultra-)Zentrifuge

trennt Teilchen verschiedener Massen in Suspension (durch Sedimentation)

Bsp.:

$r = 5\text{cm}, \quad \nu = \omega / 2\pi = 10^3/\text{s}$

$m\,a = m\,\omega^2\,r$

$\rightarrow a = \omega^2\,r$

$= 4\,\pi^2\,10^6/\text{s}^2 * 5 * 10^{-2}\,\text{m}$

$\sim 2 * 10^6\,\text{m/s}^2$

$\sim 2 * 10^5\,g$

Ruhender Beobachter:

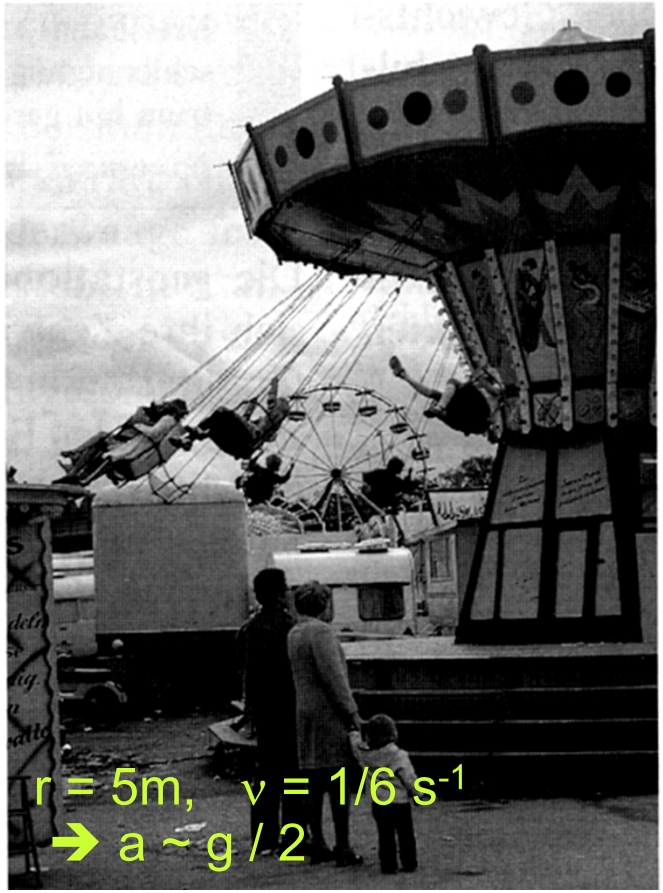
Kette bringt Zentripetalkraft auf

$\underline{F_z} = -\,m\,\omega^2\,\underline{r}$

Sichtweise im beschleunigten System:

Passagier spürt Zentrifugalkraft (Scheinkraft)

$\underline{F_{ZF}} = +\,m\,\omega^2\,\underline{r}$

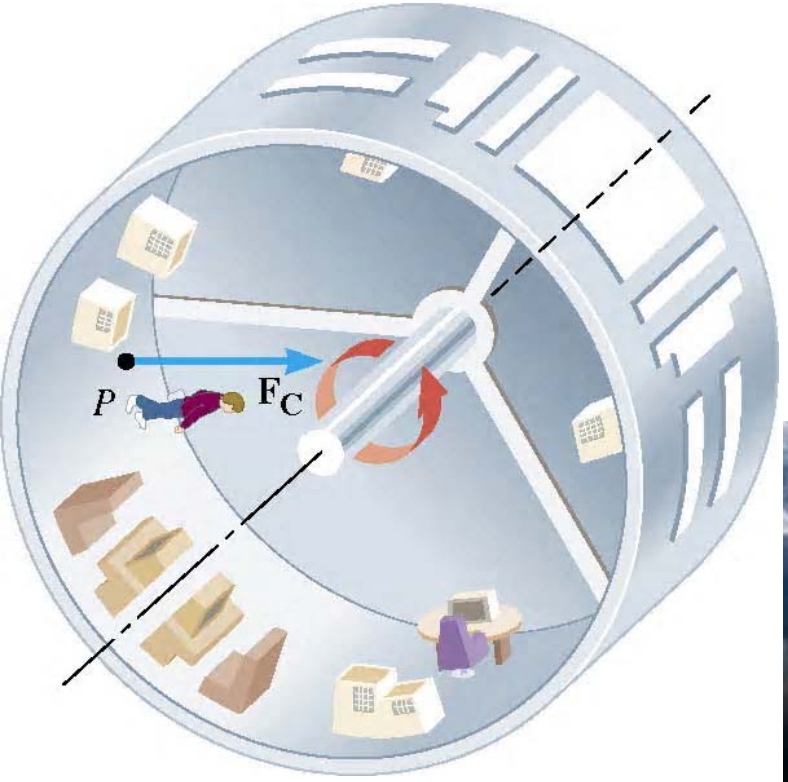


2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Zentrifugalkraft

Bsp. 4: **Zentrifugalkraft**

(Trägheitskraft auf einen Körper, der im **rotierenden Bezugssystem ruht**)

Zentrifugalkraft erzeugt künstliche Gravitation in rotierenden Raumstationen



Elysium (2013)

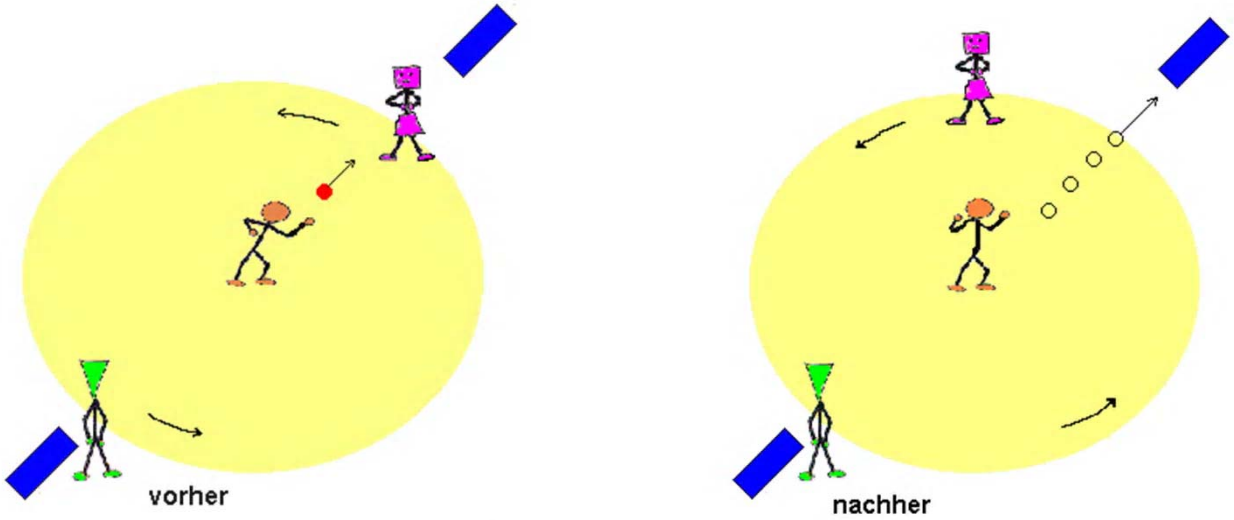
2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Corioliskraft

Bsp. 5: **Corioliskraft**

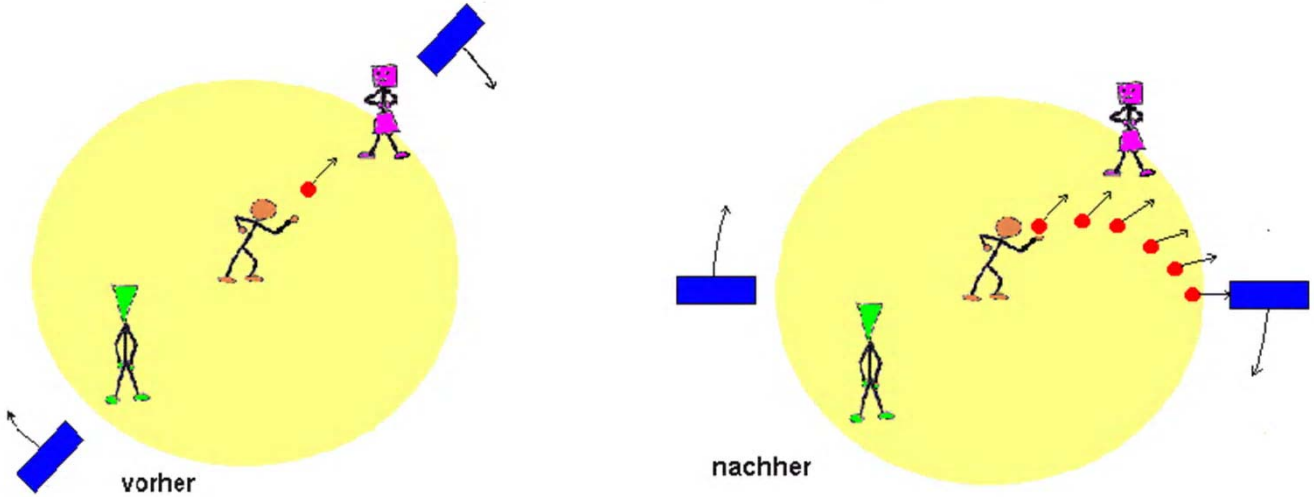
(Trägheitskraft auf einen Körper, der sich im **rotierenden Bezugssystem bewegt**)

-> Ballwurf auf rotierender Scheibe

Beobachter von Außen (im Inertialsystem)

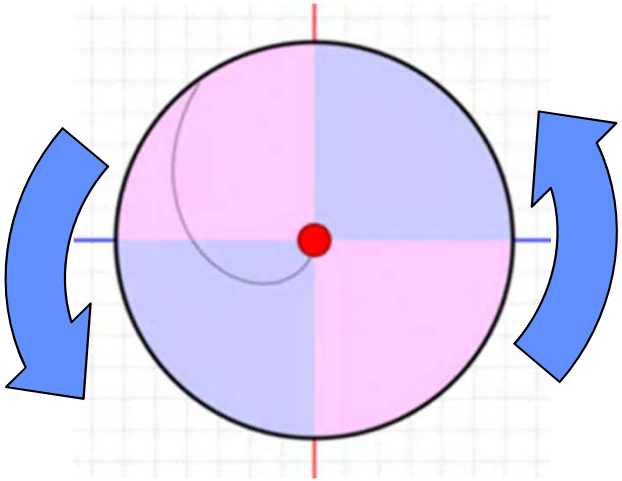


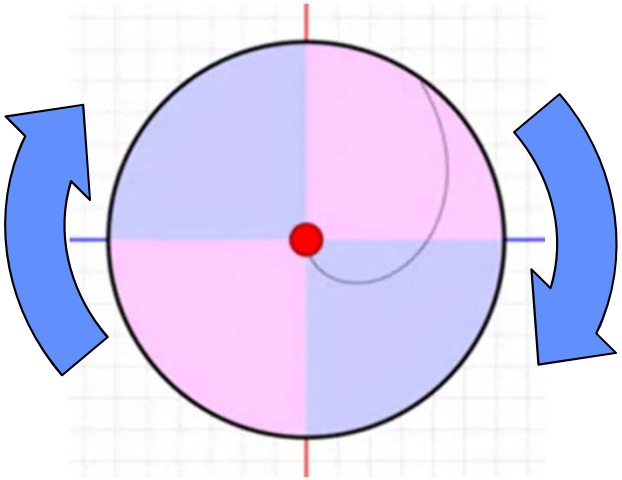
Beobachter mit auf Scheibe



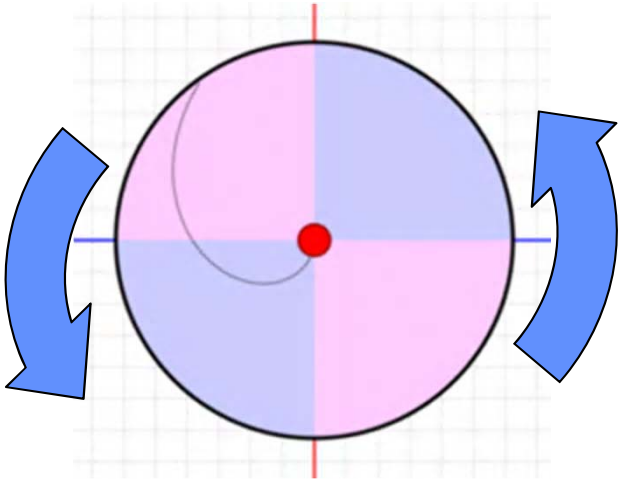
Für den mitbeschleunigten (rotierenden) Beobachter bewegt sich der Ball **nicht geradlinig**.

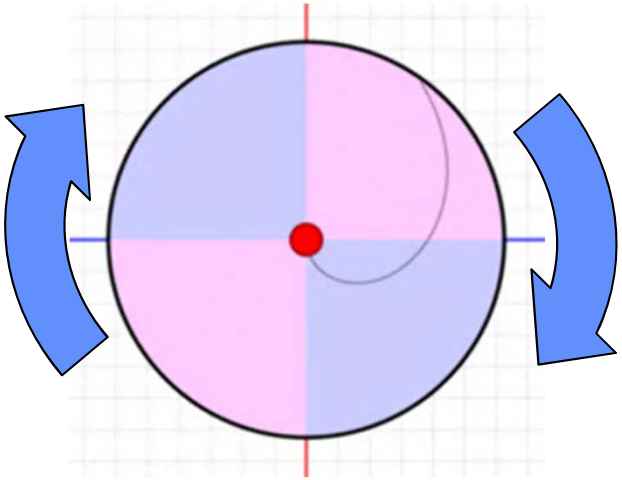
2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Corioliskraft

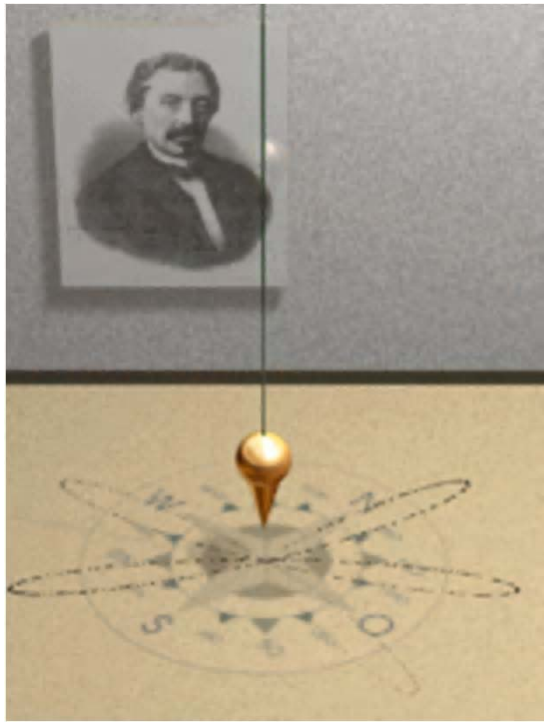




2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Corioliskraft





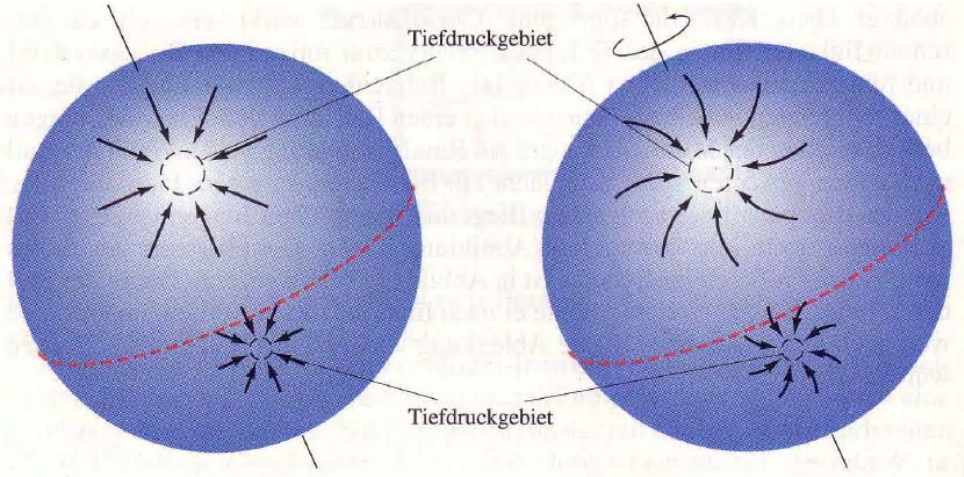


2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Corioliskraft

Bsp. 5: **Corioliskraft**

(Trägheitskraft auf einen Körper, der sich im **rotierenden Bezugssystem bewegt**)

wichtig für Wind und Wolkenbewegungen



ohne Erdrotation

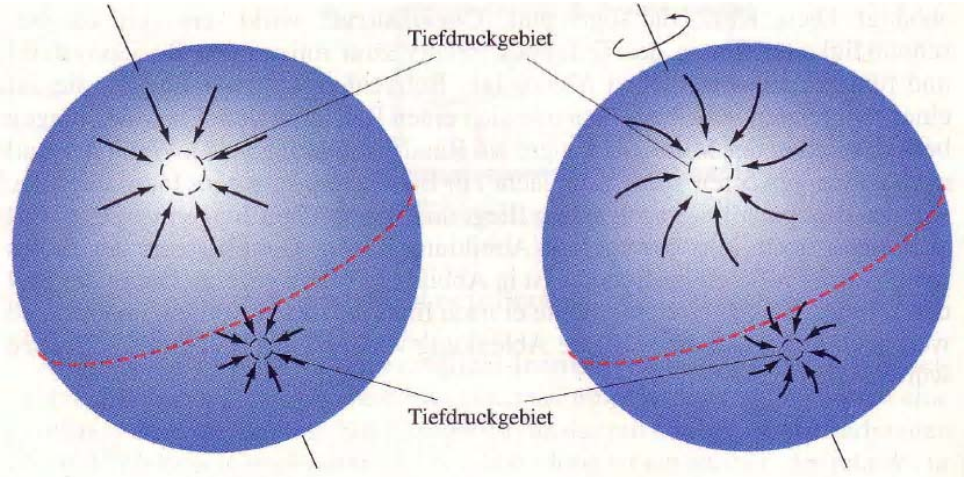
mit Erdrotation

2.2.1 Kräfte: Scheinkräfte: Corioliskraft

Bsp. 5: **Corioliskraft**

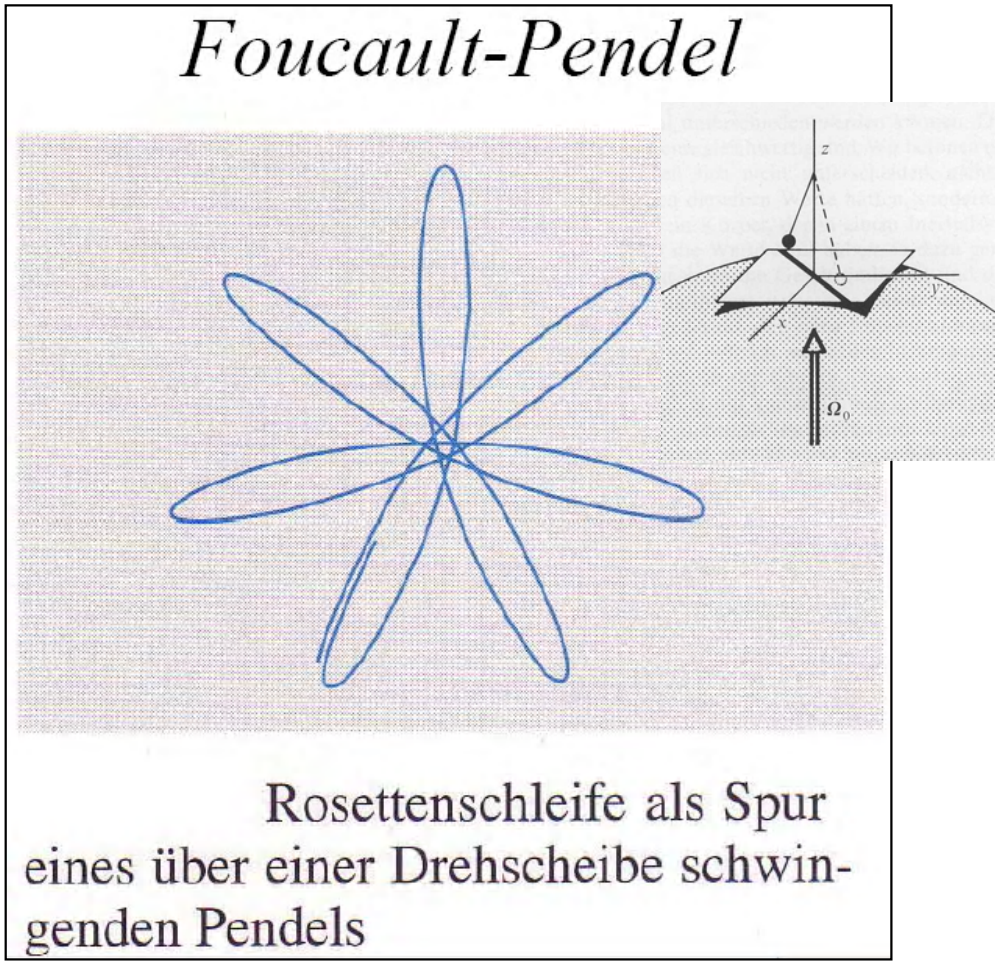
(Trägheitskraft auf einen Körper, der sich im **rotierenden Bezugssystem** **bewegt**)

wichtig für Wind und Wolkenbewegungen



ohne Erdrotation

mit Erdrotation



Rosettenschleife als Spur eines über einer Drehscheibe schwingenden Pendels

2.2.1 Kräfte: Zusammenfassung

2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

Massenpunkte werden ausschließlich durch Kräfte beschleunigt.

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

1N = 1kg m/s^2

Es gibt **4 fundamentale Kräfte** (WW):

Gravitation $\boxed{F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$, elektromagnetische WW, schwache WW, starke WW

Spezialfall der Gravitation: **Gewichtskraft** $F_G = mg$

Kräfte werden vektoriell addiert

Die Newtonschen Axiome gelten nur in **Inertialsystemen.**

In **beschleunigten Bezugssystemen** treten **Scheinkräfte** auf.

2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

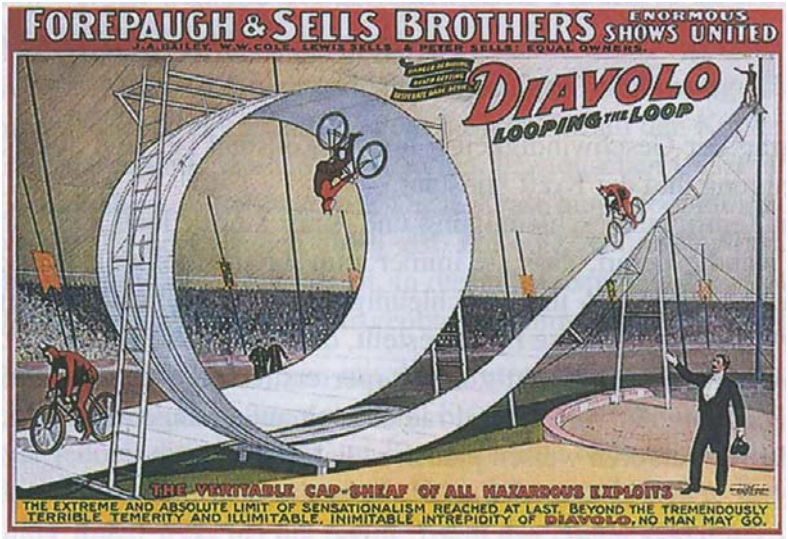
2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

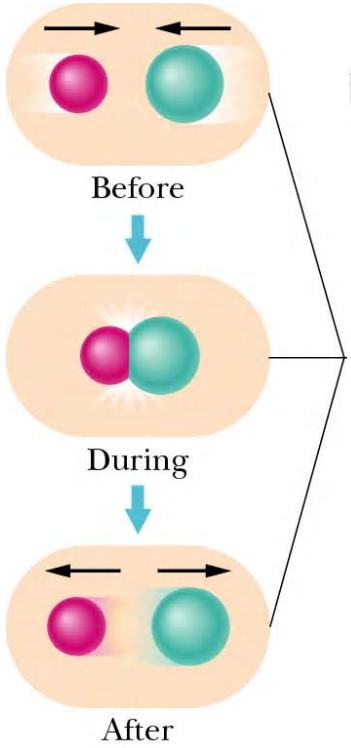
2.2.5 Rotation

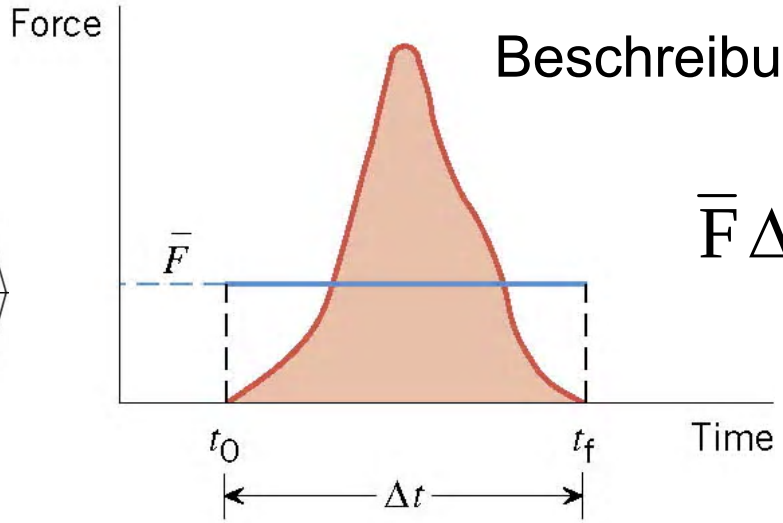


2.2.2 Impuls

Berechnung der Bewegungsbahn ist häufig kompliziert oder unlösbar …

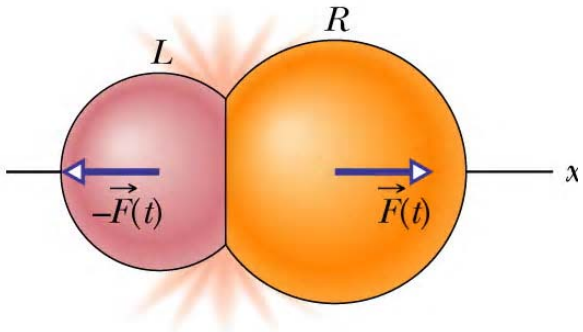
Bsp.: **zeitabhängige Kräfte** beim **Stoß** (wirken nur kurz, variieren dabei stark)





Beschreibung als „Kraftstoß“:

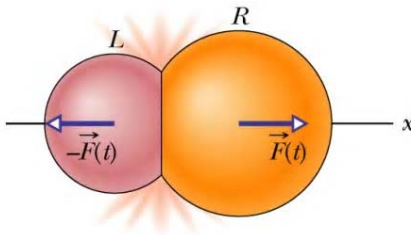
$$\bar{F}\,\Delta t = \int_{t_0}^{t_f} F(t)\,dt$$



wg. *actio* = *reactio* sind die Kraftstöße entgegengesetzt gleich, d.h. ihre **Summe ist Null**!

2.2.2 Impuls

Der **Kraftstoß** wird als **Impulsübertrag Δp** bezeichnet:



$$\boxed{\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt}$$

vorher *nachher*

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}) + (\vec{p}_2 - \Delta\vec{p})$$

$$= \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

actio = *reactio*, d.h. beide Impulsüberträge heben sich auf!

➔ Gesamtimpuls bleibt konstant (**erhalten**) während des gesamten Vorgangs!

Erhaltungsgrößen

- bleiben in jedem **geschlossenen** System konstant (erhalten): $\sum_{i \in System} X_i(t) = const$

  (geschlossenes System: von Außenwelt abgekoppelt, keine Wechselwirkung)

- sind fundamentale Folge der **Symmetrie** der Raumzeit:

  Experiment ist unabhängig von: **Zeit ➔ Energie-Erhaltung**

  Ort ➔ Impuls-Erhaltung, **Drehwinkel ➔ Drehimpuls-Erhaltung**

- erlauben einfache Beschreibung über Bilanzgleichungen

2.2.2 Impuls

Anschaulich ist der **Impuls** gleich dem **„Schwung“** einer sich bewegenden Masse.

Impuls ist proportional zur Geschwindigkeit und zur Masse.

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

(m=const.)

Kraft	$\vec{F}(t) = m\vec{a}$	**Beschleunigung**
↕		↕
Impuls	$\vec{p}(t) = m\vec{v}$	**Geschwindigkeit**

Einheit p:
1 Ns = 1 kg m/s

1. Newtonsches Axiom:
   Wirkt keine Kraft auf einen frei beweglichen Körper, so ändert sich sein Impuls nicht.
2. Newtonsches Axiom:
   Ausschließlich Kräfte verursachen eine Impulsänderung.
3. Newtonsches Axiom:
   Im abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls erhalten.

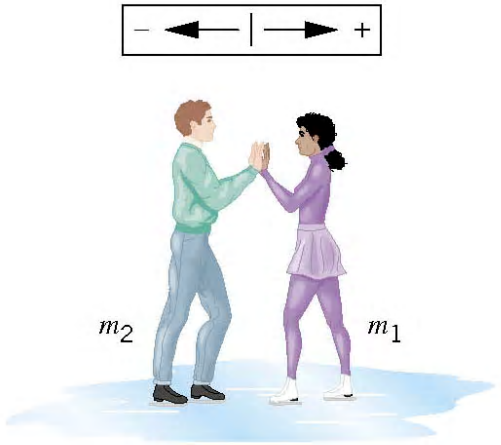
2.2.2 Impuls: Impulserhaltung

Der Impuls mehrerer Objekte ist die vektorielle Summe der Einzelimpulse.

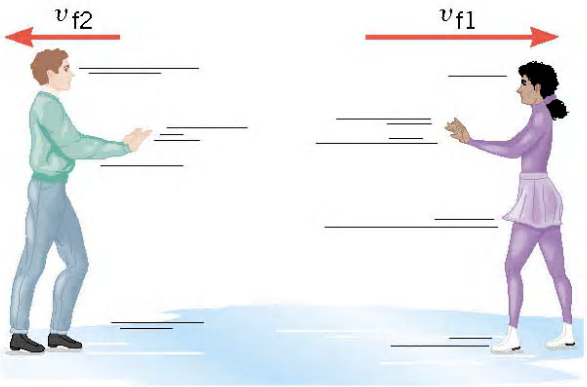
Impulserhaltung:

$$\boxed{\vec{p}_{Ges} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 + \ldots = \overrightarrow{const.}}$$

für alle Zeiten!



(*a*) Before



(*b*) After

Bsp.: Abstoßung der Schlittschuhläufer

Idee: keine Reibungskraft, d.h. kein Impulsübertrag parallel zum Boden, d.h. die beiden Läufer bilden ein abgeschlossenes System

vorher: $v_1=v_2=0$ ➔ $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$

hinterher: $m_1v'_1 + m_2v'_2 = 0$ (Impulserhaltung)

➔ $m_1v'_1 = - m_2v'_2$ *(v': Strich steht für „hinterher")*

$$\Rightarrow \quad v_1' = -\frac{m_2}{m_1}\, v_2'$$

Experimente: Impulserhaltung

$$F = \frac{dp}{dt} = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$= m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

2.2.2 Impuls: Impulserhaltung

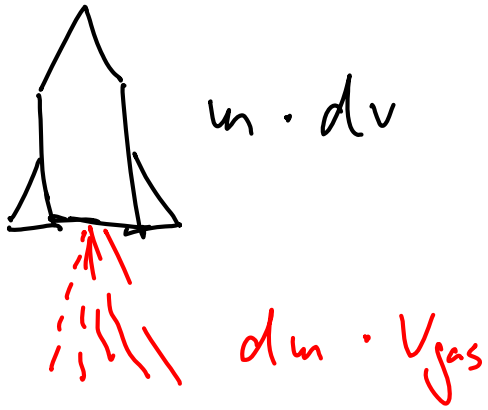
Der Impuls mehrerer Objekte ist die vektorielle Summe der Einzelimpulse.

Impulserhaltung:

$$\boxed{\vec{p}_{Ges} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2 + \ldots = \overrightarrow{const.}}$$

für alle Zeiten!

Rakete im Zeitintervall dt:



$$0 = \dot{p} = \frac{d}{dt} m \cdot v = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v_{Gas}$$

$$\Rightarrow m\dot{v} = -\dot{m} \cdot v_{Gas}$$

$$\Rightarrow \dot{v} = -\frac{\dot{m}}{m} \cdot v_{Gas}$$

Impuländerung der Rakete + Gas

$$v(t) - v(0) = -\int_{t'=0}^{t} \frac{\dot{m}}{m} v_{Gas}\, dt'$$

$$\int_{t'=0}^{t} f[x(t')]\dot{x}dt' = \int_{x(0)}^{x(t)} f(x)dx$$

$$v(t) = v(0) - v_{Gas} \cdot \int_{m(t'=0)}^{m(t)} \frac{dm'}{m'}$$

$$v(t) - v(0) = -v_{Gas} \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = v_{Gas} \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

Raketengleichung

$$v(t) = v_{Gas} \ln\left(\frac{m_{Start}}{m(t)}\right)$$

für den Start

2.2.2 Impuls: Zusammenfassung

Kräfte sind die Ursache von **Impulsänderungen**.

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impulsübertrag = Kraftstoß

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

Anschaulich ist der **Impuls p** der **„Schwung“**.

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}$$

Im **abgeschlossenen System** ist der **Impuls erhalten**,

d.h. der Gesamtimpuls ist konstant.

2. Mechanik starrer Körper: 2.2 Dynamik

Dynamik: Einfluss von Masse und Kraft auf die Bewegung

Inhalt:

2.2.1 Kräfte

2.2.2 Impuls

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

2.2.4 Schwingungen

2.2.5 Rotation

2. Mechanik starrer Körper: 2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

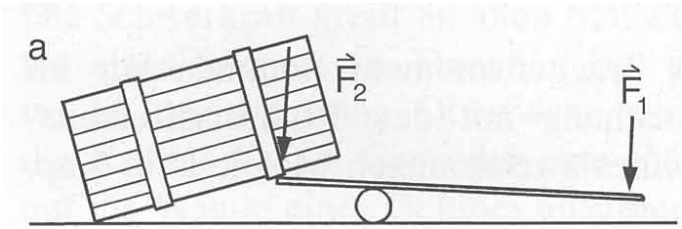
Manchmal interessiert uns **nicht der zeitliche Ablauf** der Bewegung, sondern nur **Anfangs- und Endzustand**, z.B. deren **Energie**.

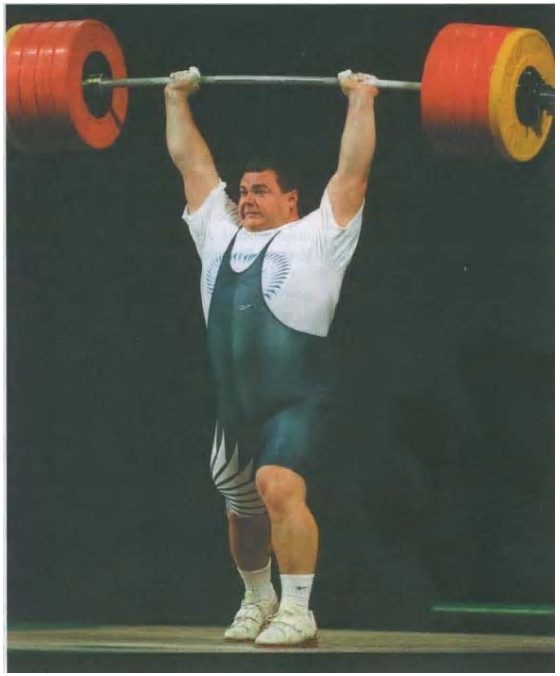
Mit **Erhaltungsgrößen** wie **Energie**, Impuls und Drehimpuls lassen sich Vorgänge oft viel einfacher beschreiben.

Energie E ist **gespeicherte Arbeit W**; **Leistung P** ist **Arbeit pro Zeit**.

Arbeit ist proportional zu Kraft und Weg:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$





2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit ist Kraft mal Weg:

$$W = F \cdot \Delta s$$

Einheit: 1 N m = 1 kg m^2/s^2 = 1 J (Joule)

(hier: konstante Kraft F parallel zum Weg Δs)

Es gibt verschiedene Formen von Arbeit:

Beschleunigungsarbeit, Hubarbeit, Spannarbeit, Reibungsarbeit, …

Mit diesen wird Energie von einer Form in eine andere überführt (Energieerhaltung):

kinetische Energie, potenzielle Energie, thermische Energie (Wärme), chemische Energie, …

2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

Verallgemeinerungen:

- konstante Kraft F nicht parallel Δs

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

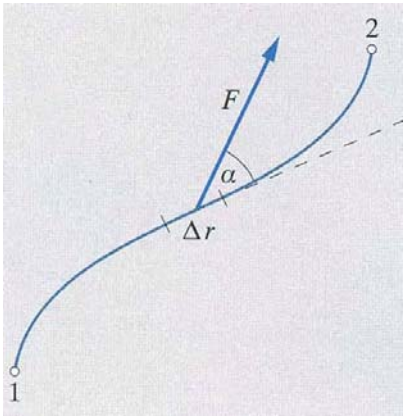
- Kraft F(s) hängt vom Ort ab

$$W = \int F(x)\,dx$$

- Weg nicht geradlinig

$$W = \int_1^2 \vec{F}(\vec{s})\,d\vec{s}$$

Linienintegral



2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

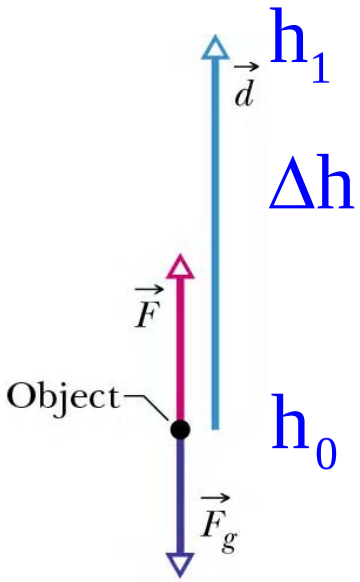
Dann gilt: $\boxed{W = F \cdot \Delta s}$

Bsp.: **Hubarbeit ⇔ potenzielle Energie** (Energie im ruhenden Körper)

Verrichtung von Arbeit gegen die Gravitationskraft.

$$W = F \cdot \Delta s = m \cdot g \cdot \Delta h \qquad \Rightarrow W = E_{pot}(h_1) - E_{pot}(h_0)$$

$$\boxed{\Rightarrow E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$



Die verrichtete Arbeit ist in dem Körper in Form von potenzieller Energie gespeichert.

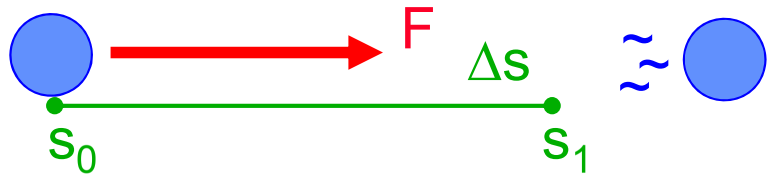
2.2.3 Arbeit, Energie, Leistung

1) **konstante** Kraft F **parallel** zur Strecke Δs.

Dann gilt: $\boxed{W = F \cdot \Delta s}$

Bsp.: **Beschleunigungsarbeit ⇔ kinetische Energie** (Energie in bewegter Masse)

Ein frei beweglicher Ball wird aus der Ruhe (v_0=0) mit einer konstanten Muskelkraft F über eine Strecke Δs auf die Geschwindigkeit v beschleunigt (keine Reibung, keine anderen Kräfte):



$$W = F \cdot \Delta s = ma \cdot \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} m(at)^2 = \tfrac{1}{2} mv^2$$

$$\Rightarrow W = E_{kin,1} - E_{kin,0} \Rightarrow \boxed{E_{kin} = \tfrac{1}{2} mv^2}$$

Die verrichtete Arbeit ist in dem Ball in Form von kinetischer Energie gespeichert.