Universität zu Köln
II. Physikalisches Institut
Prof. Thomas Michely
Dr. Carsten Busse

7. Juli 2010

Experimentalphysik II (SS 10)

Hausaufgaben 12

45. *Überlagerung von Wellen*

Zwei elektromagnetische Wellen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Phase, breiten sich in der gleichen Richtung im Raum aus. Unter welchen Umständen addieren sich die Intensitäten der beiden Wellen so, dass die Gesamtintensität immer gleich der Summe der Einzelintensitäten der beiden Wellen ist, und zwar unabhängig von deren Phasenbeziehung?

(5 Punkte)

46. *Gruppengeschwindigkeit*

Bei optischen Gläsern wird häufig angenommen, dass die Dispersion im sichtbaren Spektrum durch $n(\lambda) = a + b\lambda$ mit Konstanten a und b angenommen werden kann.

a) Zeigen Sie, dass jetzt die Gruppengeschwindigkeit nicht von der Wellenlänge abhängt.

b) Wie groß muss die Konstante a mindestens sein?

(4 Punkte)

47. *Fouriertransformation*

Die Fouriertransformation einer nicht-periodischen, ortsabhängigen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx. \tag{1}$$

.

Betrachten Sie hier folgende Funktion:

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}. \tag{2}$$

a) Skizzieren Sie diese Funktion. Wie nennt man die entstehende Kurve?

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von (2) und skizzieren Sie auch diese Funktion. Was fällt Ihnen auf?

(5 Punkte)

Bitte wenden.

48. *Fourierreihe*

n der Vorlesung hatten Sie gesehen, dass Sie räumlich periodische Funktionen mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ in eine Fourierreihe entwickeln können:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nkx). \tag{3}$$

a) Integrieren Sie beide Seiten von(3) über eine Wellenlänge λ um zu zeigen, dass

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx. \tag{4}$$

b) Die trigonometrischen Funktionen sind im folgenden Sinn orthogonal:

$$\int_0^{\lambda} \sin(akx) \cos(bkx) dx = 0 \tag{5}$$

und

$$\int_0^{\lambda} \cos(akx) \cos(bkx) dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab}.$$

Dabei ist δ_{ab} das Kronecker-Delta.

Nutzen sie diese Bedingungen aus, um zu zeigen, dass

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos(nkx) dx. \tag{6}$$

Ganz analog erhält man die Koeffizienten b_n zu

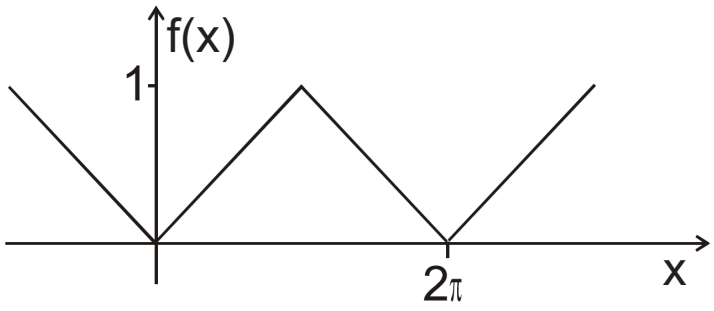
$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin(nkx) dx. \tag{7}$$

Diesen Zusammenhang müssen Sie hier nicht zeigen.

c) Zeigen Sie: Für eine gerade Funktion $f(x) = f(-x)$ verschwinden die Koeffizienten b_n und für eine ungerade Funktion $f(x) = -f(-x)$ verschwinden die Koeffizienten a_n aufgrund der Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Bitte umblättern.

d) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für die unten abgebildete periodische Funktion.



e) Die Formeln der Fourieranalyse lassen sich kompakter schreiben, wenn man komplexe Zahlen einführt. Zeigen Sie, dass sich Gleichung 3 schreiben lässt als:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{inkx} \tag{8}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} e^{-inkx} dx. \tag{9}$$

.

Hinweis: Benutzen sie folgende Zusammenhänge:

$$\cos nkx = \frac{1}{2}\left(e^{inkx} + e^{-inkx}\right) \tag{10}$$

$$\sin nkx = \frac{1}{2i}\left(e^{inkx} - e^{-inkx}\right) \tag{11}$$

(7 Punkte)

Abgabe der Übungszettel am 14. Juli vor der Vorlesung, Besprechung der Lösungen am 19. Juli in den Übungsgruppen. Dieser Zettel ist der letzte Übungszettel.